Correction DM ESSEC n° 10

<u>Exercice</u> :hec 2005 Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.

L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\text{Id}$

A. Étude du cas n = 2.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

1. • $f \circ f = 4\text{Id}$ si et seulement si on a l'égalité sur les matrices associée : $A^2 = 4I$
   $A^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4I$ donc $f \circ f = 4\text{Id}$.

   • Comme A est inversible (colonnes libres car non colinéaires) alors f est bijective et donc $\ker(f) = \{0\}$ et $\text{Im (f)} = \mathbb{R}^2$
2. On note $F = \ker(f - 2\text{Id})$ et $G = \text{Im (f} - 2\text{Id)}$.

   (a) La matrice de $f - 2\text{Id}$ est $A - 2I = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$

   On a donc $Imf - 2\text{Id} = Vect((f-2\text{Id})(1,0),(f-2\text{Id})(0,1)) = Vect((\sqrt{2}-2,\sqrt{2}),(\sqrt{2},-\sqrt{2}-2))$.
   Montrons que la famille $((\sqrt{2}-2,\sqrt{2}),(\sqrt{2},-\sqrt{2}-2))$ est liée :
   $a(\sqrt{2}-2,\sqrt{2})+b(\sqrt{2},-\sqrt{2}-2) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} a(\sqrt{2}-2)+b\sqrt{2} & = & 0 & L_1 \\ a\sqrt{2}+b(-\sqrt{2}-2) & = & 0 & L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a(\sqrt{2}-2)+b\sqrt{2} & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$
   $\left\{\begin{array}{rcll} b & = & a(\sqrt{2}-1) & L_1 \\ 0 & = & 0 & L_2 < -(\sqrt{2}-2)L_2 - \sqrt{2}L_1 \end{array}\right.$.
   La famille est donc liée donc $(\sqrt{2},-\sqrt{2}-2)$ est colinéaire à u d'où :

   $$Imf - 2\text{Id} = Vect(u)$$

   Donc (u) est une base de G (génératrice et libre car formée d'un seul vecteur non nul) donc $\dim(G) = 1$
   Et le théorème du rang donne alors $\dim(\text{Imf} - 2\text{Id}) = 2 - \dim(\ker f - 2\text{Id}) = 1$
   Conclusion : $\boxed{\dim(F) = 1}$
   On résout l'équation $(A - 2I)X = 0$, on trouve que $\left(\sqrt{2}+1, 1\right)$ est une base de F

   (b) On vérifie que $u \neq 0$ est bien vecteur propre associé à -2 :
   $(A + 2I)\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 2-4+2 \\ 2-2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   Donc u est vecteur propre associé à la valeur propre -2.
   Si $\ker(f + 2\text{Id})$ était de dimension 2, on aurait $\ker(f + 2\text{Id}) = \mathbb{R}^2$ donc $f + 2\text{Id} = 0$ et $f = -2\text{Id}$ ce qui n'est pas le cas.
   Donc $\dim(\ker(f + 2\text{Id})) \leq 1$ et donc $\dim(\ker(f + 2\text{Id})) = 1$ et u en est une base.
   Ainsi $\ker(f + 2\text{Id}) = \text{Vect}(u) = G \neq \{0\}$
   Conclusion : $\boxed{G \text{ est le sous espace propre associé à } -2}$
3. On a vu que -2 était valeur propre de f
   Comme $\ker(f - 2\text{Id}) \neq \{0\}$ alors 2 est également valeur propre.
   Donc dans $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, f qui a deux valeurs propres distinctes est diagonalisable sur la base obtenue en concaténant deux vecteurs propres associés à -2 et 2 : $u = \left(\sqrt{2}-2, \sqrt{2}\right)$ et $v = \left(\sqrt{2}+1, 1\right)$
   La martice de passage de la base canonique à la base (u, v) est alors $\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

B. Étude du cas général.

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

1. (a) Comme $f \circ f = 4\mathrm{Id}$ alors $\frac{1}{4} f \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ \frac{1}{4} f = \mathrm{Id}$ par linéarité de f.
   Donc f est bijective donc un automorphisme de $\mathbb{R}^n$et $f^{-1} = \frac{1}{4} f$

   (b) Comme f vérifie la relation polynômiale $f^2 - 4\mathrm{Id} = 0$, **si** α est valeur de f alors $\alpha^2 - 4 = 0$ et donc $\alpha = 2$ ou -2
   Conclusion : $\boxed{\text{Les seules valeurs propres possibles de } f \text{ sont } 2 \text{ et } -2}$

   (c) On a $(2\mathrm{Id})^2 = 4\mathrm{Id}$ et $(-2\mathrm{Id})^2 = (-2)^2\,\mathrm{Id} = 4\mathrm{Id}$
   Donc $2\mathrm{Id}$ et $-2\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(*)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\mathrm{Id}$ et on note $F = \ker(f - 2\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(\mathrm{f} - 2\mathrm{Id})$.

2. Soit x un élément de E.
   Pour montrer que $(f(x) - 2x)$ appartient à $\ker(f + 2\mathrm{Id})$ on calcule son image par $f + 2\mathrm{Id}$:
   $(f + 2\mathrm{Id})(f(x) - 2x) = (f + 2\mathrm{Id})(f - 2\mathrm{Id})(x) = \left(f^2 - 4\mathrm{Id}\right)(x) = 0$ car $f^2 = 4\mathrm{Id}$
   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } f(x) - 2x \in \ker(f + 2\mathrm{Id})}$
   De même : $(f - 2\mathrm{Id})(f(x) + 2x) = \left(f^2 - 4\mathrm{Id}\right)(x) = 0$
   Conclusion : $\boxed{(f(x) + 2x) \text{ appartient à } \ker(f - 2\mathrm{Id}) = F.}$
   Donc si $u \in G = \mathrm{Im}\,(\mathrm{f} - 2\mathrm{Id})$ alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = (f(v) - 2v)$ et donc $u \in \ker(f + 2\mathrm{Id})$
   Conclusion : $\boxed{G \subset \ker(f + 2\mathrm{Id})}$
   Et de même si $u \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{f} + 2\mathrm{Id})$ alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = f(v) + 2v$ et donc $u \in \ker(f - 2\mathrm{Id})$
   Conclusion : $\boxed{.\mathrm{Im}\,(f + 2\mathrm{Id}) \subset \mathrm{F} = \ker(f - 2\mathrm{Id}).}$
   Pour montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f, il faut monter que ni $\ker(f - 2\mathrm{Id})$, ni $\ker(f + 2\mathrm{Id})$ ne sont réduits à $\{0\}$:
   Par l'absurde :
   - **Si** $\ker(f - 2\mathrm{Id}) = \{0\}$, comme $\mathrm{Im}\,(f + 2\mathrm{Id}) \subset \ker(f - 2\mathrm{Id})$ alors $\mathrm{Im}\,(f + 2\mathrm{Id}) = \{0\}$ et le théorème du rang donne $\dim(\ker(f + 2\mathrm{Id})) = n$
     D'où $\ker(f + 2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^n$ et pout tout u, $(f + 2\mathrm{Id})(u) = 0$ soit $f = 2\mathrm{Id}$
     Donc $\ker(f - 2\mathrm{Id}) \neq \{0\}$ et 2 est bien valeur propre de f

   Et de même $\ker(f + 2\mathrm{Id}) \neq \{0\}$
   Donc -2 est également valeur propre de f.
   Conclusion : $\boxed{2 \text{ et } -2 \text{ sont valeurs propres de } f}$

3. Soit x un vecteur de $\ker(f + 2\mathrm{Id})$.

   (a) On a $(f + 2\mathrm{Id})(x) = 0$ donc $f(x) = -2x$
   D'où $(f - 2\mathrm{Id})(x) = f(x) - 2x = -4x$
   Pour montrer que x appartient à G, i lfaut montrer qu'il est une image par $(f - 2\mathrm{Id})$:
   Or $x = -\frac{1}{4}(f - 2\mathrm{Id})(x) = (f - 2\mathrm{Id})\left(-\frac{1}{4}x\right)$ par linéarité.
   Donc $x \in G$.
   On avait déjà l'inclusion $G \subset \ker(f + 2\mathrm{Id})$. On vient de montrer $\ker(f + 2\mathrm{Id}) \subset G$
   Conclusion : $\boxed{G = \ker(f + 2\mathrm{Id})}$

   (b) Il reste à voire si la somme desdimensions des sous espaces propres est égale à n.
   Comme $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\mathrm{Id}) = \ker(f + 2\mathrm{Id})$ alors $\dim \mathrm{Im}\,(f - 2\mathrm{Id}) = \dim(\ker(f + 2\mathrm{Id}))$
   Le théormème du rang donne $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id})) = n - \dim \mathrm{Im}\,(f - 2\mathrm{Id}) = n - \dim(\ker(f + 2\mathrm{Id}))$
   Donc $\dim(\ker(f - 2\mathrm{Id})) + \dim(\ker(f + 2\mathrm{Id})) = n$
   La somme des dimension des sous espaces propres est égale à la dimension de l'espace.
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

<u>Problème</u> : Essec I 2012

Partie I - Quelques propriétés des lois log-normales

1. Les paramètres d'une loi normale sont son espérance et sa variance. Or par linéarité de l'espérance et propriétés de la variance :

$$E(aU+b) = aE(U)+b = am+b \quad , \quad V(aU+b) = a^2V(U) = a^2\sigma^2$$

donc $aU+b \hookrightarrow \mathcal{N}(am+b, a^2\sigma^2)$.

2. (a) Si $x \leqslant 0$, X est à valeurs strictement positives donc :

$$F(x) = P(X \leqslant x) = 0$$

Si $x > 0$,

$$F(x) = P(X \leqslant x) = P(\ln X \leqslant \ln x) = P(Y \leqslant \ln x) = P\left(\frac{Y}{\sigma} \leqslant \frac{\ln x}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln x}{\sigma}\right).$$

On en déduit qu'une densité f de X est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x\sigma}\Phi'\left(\frac{\ln x}{\sigma}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(b) i. Par définition de X, il existe $Y \hookrightarrow \mathcal{N}_{0,\sigma^2}$ tel que :

$$Y = \ln(X) \Longleftrightarrow X = e^Y$$

On applique alors le théorème de transfert : on considère donc l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^y \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)}$$

Il reste à obtenir l'absolue convergence de cette intégrale, équivalente à sa convergence car la fonction intégrée est positive (strictement). Elle est généralisée en $+\infty$ et $-\infty$, on utilise deux théorèmes de comparaison : En $+\infty$,

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)}}{\frac{1}{y^2}} = e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+y+2\ln(y)} = e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\left(1-\frac{2\sigma^2}{y}-\frac{4\sigma^2\ln(y)}{y^2}\right)}$$

et par croissances comparées,

$$\left(1-\frac{2\sigma^2}{y}-\frac{4\sigma^2\ln(y)}{y^2}\right) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 1 \quad \text{puis par produit} \quad -\frac{y^2}{2\sigma^2}\left(1-\frac{2\sigma^2}{y}-\frac{4\sigma^2\ln(y)}{y^2}\right) \xrightarrow[y\to+\infty]{} -\infty$$

et enfin par composée avec l'exponentielle,

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)}}{\frac{1}{y^2}} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)} = o\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2}\,dy$ converge (Riemann avec $\alpha = 2 \geqslant 1$) donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)}$ converge puis converge absolument.

En $-\infty$, on calcule la même limite qu'on peut ramener en $+\infty$ avec le changement de variable $x = -y$ ou bien qu'on peut calculer directement à condition de prendre garde que $y < 0$ donc :

$$y^2 = (-y)^2 = e^{2\ln(-y)}$$

On obtient alors la négligeabilité devant $\frac{1}{y^2}$ et $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{y^2}\,dy$ converge, donc par comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)}$ converge puis converge absolument.

Enfin X admet bien une espérance, et

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}-2y\right)}.$$

ii. Ce changement de variable est affine donc valide même sur des intégrales généralisées, on a de plus

$$t = \frac{y}{\sigma} - \sigma \Longleftrightarrow y = \sigma(t+\sigma) \quad \text{donc} \quad dt = \frac{1}{\sigma}dy \Longleftrightarrow dy = \sigma dt$$

en enfin on a :

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(t^2+\sigma^2+2t\sigma-2\sigma t-2\sigma^2\right)}\, dt = e^{\frac{\sigma^2}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

car on reconnaît l'espérance de la loi normale centrée réduite.

(c) i. X^α est à valeurs positives car X l'est, et

$$\ln(X^\alpha) = \alpha \ln X \hookrightarrow \mathcal{N}(\alpha \times 0, \alpha^2\sigma^2)$$

avec la question 1.

Donc X^α suit la loi log-normale de paramètres 0 et $\alpha^2\sigma^2$.

ii. On en déduit que X^2 suit la loi log-normale de paramètres 0 et $4\sigma^2$, donc admet une espérance et

$$E(X^2) = e^{\frac{(2\sigma)^2}{2}} = e^{\frac{4\sigma^2}{2}} = e^{2\sigma^2}.$$

On en déduit enfin que X admet une variance, et on a par formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X) = e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2} = e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

3. (a) μX est à valeurs positives car X l'est, et

$$\ln(\mu X) = \ln(\mu) + \ln(X)$$

suit la loi normale de paramètres $(m + \ln\mu)$ et σ^2 avec la question 1.

On en déduit que μX suit la loi log-normale de paramètres $(m + \ln(\mu), \sigma^2)$.

(b) On choisit μ pour que μX suive une loi log-normale de premier paramètre 0 et appliquer ce qui précède :

$$m + \ln(\mu) = 0 \Longleftrightarrow \ln(\mu) = -m \Longleftrightarrow \mu = e^{-m}.$$

On en déduit que la variable $X' = e^{-m}X$ suit une loi log-normale de paramètres 0 et σ^2, donc admet une espérance et une variance, donc $X = e^m X'$ aussi.
Enfin par linéarité de l'espérance et propriétés de la variance :

$$E(X) = e^m E(X') = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad V(X) = (e^m)^2 V(X') = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

Partie II - Le modèle binomial de Cox-Ross-Rubinstein

4. (a) Elle prend les valeurs -1 et 1 (avec la probabilité $1/2$, ce qui va permettre de simuler Y_k).

(b)
```
function c= simul_C(n,mu,v)
tmp=1
for k= 1:n do
tmp=tmp*(1+mu/n+v/sqrt(n)*(2*floor(rand()*2)-1))
       end
c= tmp
endfunction
```

5. (a) Y_k est finie donc admet des moments de tous ordres.

On sait de plus que $Y_k = 2X_k - 1$ et $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, par linéarité de l'espérance et propriété de la variance, on obtient

$$E(Y_k) = 0 \quad \text{et} \quad V(Y_k) = 1.$$

(b) i. C'est une récurrence évidente.

ii. Par indépendance des variables Y_k, les variables en produit sont également indépendantes ce qui donne : C_n admet une espérance et :

$$E(C_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + 0\right) = \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n.$$

Ensuite on écrit

$$C_n^2 = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)^2$$

puis par indépendance des variables du produit, C_n^2 admet une espérance et :

$$E(C_n^2) = \prod_{k=1}^{n} E\left[\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)^2\right] = \left(E\left[\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)^2\right]\right)^n.$$

Reste à calculer :

$$E\left[\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)^2\right] = E\left[\left(\left[1 + \frac{\mu}{n}\right]^2 + \frac{v^2}{n} Y_k^2 + 2\left[1 + \frac{\mu}{n}\right] \frac{v}{n} Y_k\right)\right].$$

Enfin comme Y_k^2 est certaine égale à 1 et par linéarité de l'espérance on a :

$$E\left[\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)^2\right] = \left[1 + \frac{\mu}{n}\right]^2 + \frac{v^2}{n} + 0.$$

Enfin on obtient

$$E(C_n^2) = \left(\left[1 + \frac{\mu}{n}\right]^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n.$$

Cela donne par formule de Koenig-Huyghens :

$$V(C_n) = \left(\left[1 + \frac{\mu}{n}\right]^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{2n}.$$

(c) On passe à l'exponentielle car 1^∞ est une forme indéterminée :

$$E(C_n) = e^{n \ln\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)}$$

et $\frac{\mu}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc :

$$\ln\left(1 + \frac{\mu}{n}\right) \sim \frac{\mu}{n} \quad \text{puis} \quad n \ln\left(1 + \frac{\mu}{n}\right) \sim \mu$$

et en composant la limite (pas l'équivalent ! ! !) par l'exponentielle :

$$E(C_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{\mu}.$$

On a de même

$$\left(\left[1 + \frac{\mu}{n}\right]^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + 2\frac{\mu}{n} + \frac{\mu^2}{n^2} + \frac{v^2}{n}\right)\right)$$

Or

$$\ln\left(1 + 2\frac{\mu}{n} + \frac{\mu^2}{n^2} + \frac{v^2}{n}\right) \sim 2\frac{\mu}{n} + \frac{\mu^2}{n^2} + \frac{v^2}{n} = \frac{2n\mu + \mu^2 + nv^2}{n} = \frac{2\mu + v^2 + \frac{\mu^2}{n}}{n}$$

Donc

$$n \ln\left(1 + 2\frac{\mu}{n} + \frac{\mu^2}{n^2} + \frac{v^2}{n}\right) \sim 2\mu + v^2 + \frac{\mu^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\mu + v^2$$

et enfin

$$E(C_n^2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{2\mu + v^2}$$

On en déduit par Koenig-Huyghens que

$$V(C_n) = E(C_n^2) - [E(C_n)]^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{2\mu+v^2} - e^{2\mu} = e^{2\mu}(e^{v^2} - 1).$$

La loi log-normale admettant cette espérance et cette variance a pour paramètres m et σ^2, avec (on identifie avec les résultats de la partie I) :

$$\left\{\begin{array}{c} \mu = m + \frac{\sigma^2}{2} \\ 2m + \sigma^2 = 2\mu \\ \sigma^2 = v^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} m = \mu - \frac{v^2}{2} \\ \sigma = v \end{array}\right.$$

6. (a) Question difficile, demandant de l'initiative et de l'intuition.
L'idée à avoir est la suivante : comme Y_k peut prendre 2 valeurs, -1 et 1, il faut montrer l'égalité pour les valeurs -1 et 1 **uniquement !**, ce qui amène un système d'équation (très pénible) à deux inconnues a_n et b_n :

$$\left\{\begin{array}{l} \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) = a_n + b_n \\ \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) = a_n - b_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) = a_n + b_n \\ -2b_n = \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) = a_n + b_n \\ b_n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}}{1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}}\right) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a_n = \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right) \\ b_n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}}{1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}}\right) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{2}\ln\left[\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}\right)\ \left(1 + \frac{\mu}{n} - \frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ b_n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}}{1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}}\right) \end{array}\right.$$

(b) On somme cette égalité pour k allant de 1 à n, et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}Y_k\right) = \ln\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}}Y_k\right) = \ln C_n$$

d'une part, et

$$\sum_{k=1}^{n} a_n + b_n Y_k = a_n\sum_{k=1}^{n} 1 + b_n\sum_{k=1}^{n} Y_k = na_n + b_n\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

On en déduit donc :

$$\ln(C_n) = na_n + b_n\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

(c) On utilise le théorème central limite, qui s'énonce ainsi :

La somme centrée réduite de variables aléatoires indépendantes et de même loi converge en loi vers une variable suivant la loi normale centrée réduite.

Or les variables Y_k sont indépendantes et suivent la même loi, et

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0 \quad \text{et} \quad V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = nV(Y_1) = n$$

donc la somme centrée réduite associée à $\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ est :

$$Y^* = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k - 0}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Y_k$$

qui converge donc en loi vers la loi normale centrée réduite (ou plus exactement vers une variable suivant la loi normale centrée réduite).

7. (a) Au voisinage de 0,
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
(b) On applique le développement précédent à $u = vx + \mu x^2$ ou $u = -vx + \mu x^2$, qui tendent toutes deux vers 0 quand x tend vers 0 :
$$\ln(1+vx+\mu x^2) = vx + \mu x^2 - \frac{1}{2}\left(vx+\mu x^2\right)^2 + o\left(\left(vx+\mu x^2\right)^2\right) = vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)x^2 + o(x^2).$$
$$\ln(1-vx+\mu x^2) = -vx+\mu x^2 - \frac{1}{2}\left(-vx+\mu x^2\right)^2 + o\left(\left(-vx+\mu x^2\right)^2\right) = -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)x^2 + o(x^2).$$
(c) On applique les développements précédents avec $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On obtient
$$a_n = \frac{\mu - \frac{v^2}{2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{donc} \quad na_n = \mu - \frac{v^2}{2} + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu - \frac{v^2}{2}.$$
D'autre part on obtient
$$b_n = \frac{v}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{donc} \quad \sqrt{n}b_n = v + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} v.$$
On en déduit qu'à partir d'un certain rang, comme $0 < v$,
$$\sqrt{n}b_n > 0 \quad \text{et comme } \sqrt{n} > 0, \quad b_n > 0.$$

8. Enchaînement de questions très difficiles, utilisant la définition de la limite, et en particulier la propriété :
$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$ si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que :
$$|x - x_0| \leqslant \rho \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$
(a) Soit ε un réel strictement positif.
i. Φ est continue donc
$$\lim_{x\to y} \Phi(x) = \Phi(y)$$
On applique ce qui précède en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ et ρ par $\eta > 0$ et on a : Pour $|x-y| \leqslant \eta$,
$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
En posant $x = y - \eta$, on a $|x-y| = \eta \leqslant \eta$ donc :
$$|\Phi(y-\eta) - \Phi(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iff -\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y-\eta) - \Phi(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
et enfin (on garde le côté gauche) :
$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y-\eta).$$
Ensuite on applique à $x = y + \eta$, on a $|y - x| = \eta \leqslant \eta$, donc :
$$|\Phi(y+\eta) - \Phi(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iff -\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y+\eta) - \Phi(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
ce qui donne (on garde le côté droit) :
$$\Phi(y+\eta) \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$
enfin on a $\eta > 0$ donc
$$-\eta + y < y < \eta + y$$
et la croissance de Φ donne
$$\Phi(y-\eta) \leqslant \Phi(y+\eta).$$
On peut enfin rassembler pour obtenir :
$$\Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y-\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

ii. La suite
$$\frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$$
(conséquence immédiate des propriétés obtenues à la question 7), et $\eta > 0$, donc il existe n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$,
$$\left|\frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n} - y\right| \leqslant \eta \iff -\eta \leqslant \frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n} - y \leqslant \eta$$
et enfin pour $n \geqslant n_1$,
$$y - \eta \leqslant \frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n} \leqslant y + \eta.$$

iii. On a vu (convergence en loi) que pour tout x,
$$F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(x) \quad \text{donc} \quad F_n(y+\eta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(y+\eta)$$
Il existe donc n_3 tel que pour $n \geqslant n_3$,
$$|F_n(y+\eta) - \Phi(y+\eta)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iff -\frac{\varepsilon}{2} \leqslant F_n(y+\eta) - \Phi(y+\eta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
et enfin
$$F_n(y+\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) + \frac{\varepsilon}{2}.$$
De même
$$F_n(y-\eta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(y-\eta)$$
donc il existe n_4 tel que pour $n \geqslant n_4$,
$$|F_n(y-\eta) - \Phi(y-\eta)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \iff -\frac{\varepsilon}{2} \leqslant F_n(y-\eta) - \Phi(y-\eta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
et enfin
$$F_n(y-\eta) \geqslant \Phi(y-\eta) - \frac{\varepsilon}{2}.$$
Enfin on prend $n_2 = \max(n_3, n_4)$, pour $n \geqslant n_2$, les deux propriétés sont bien vérifiées.

iv. On revient à la définition d'une fonction de répartition :
$$G_n(x) = \Pr(\ln C_n \leqslant x) = \Pr\left(na_n + b_n \sum_{k=1}^{n} Y_k \leqslant x\right) = \Pr\left(\frac{Y_1 + \ldots Y_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{x-na_n}{b_n\sqrt{n}}\right) = F_n\left(\frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n}\right).$$
On prend alors $n \geqslant n_0 = \max(n_1, n_2)$ et on utilise les questions précédentes :

On a alors $y - \eta \leqslant \frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n} \leqslant y + \eta$ donc par croissance de F_n,
$$F_n(y-\eta) \leqslant F_n\left(\frac{x-na_n}{\sqrt{n}b_n}\right) = G_n(x) \leqslant F_n(y+\eta).$$
Or avec les autres questions on peut écrire :
$$F_n(y-\eta) \geqslant \Phi(y-\eta) - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \Phi(y) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \Phi(y) - \varepsilon.$$
De même
$$F_n(y+\eta) \leqslant \Phi(y+\eta) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \Phi(y) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \Phi(y) + \varepsilon.$$
Enfin on a
$$-\varepsilon + \Phi(y) \leqslant G_n(x) \leqslant \Phi(y) - \varepsilon \iff |G_n(x) - \Phi(y)| \leqslant \varepsilon$$
et en remplaçant y par sa valeur en fonction de x on a le résultat.

(b) On en déduit que (G_n est la fonction de répartition de $\ln C_n$) :

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right).$$

On prend $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$\Pr\left(X \leqslant \frac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}\right) = \Pr\left(vX+\mu-\frac{v^2}{2} \leqslant x\right) = F_{vX+\mu-\frac{v^2}{2}}(x)$$

donc

$$\ln C_n \xrightarrow{\text{loi}} Y = vX+\mu-\frac{v^2}{2}$$

qui suit la loi normale de paramètres

$$E(Y) = \mu - \frac{v^2}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = v^2.$$

9. Enfin $C_n > 0$ donc pour tout $x \leqslant 0$,

$$F_{C_n}(x) = \Pr(C_n \leqslant x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et pour tout $x > 0$,

$$F_{C_n}(x) = \Pr(C_n \leqslant x) = \Pr(\ln C_n \leqslant \ln x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Pr(Y \leqslant \ln x).$$

On en déduit que C_n converge en loi vers une variable aléatoire U à valeurs strictement positives, et telle que pour tout $x > 0$,

$$\Pr(U \leqslant x) = \Pr(Y \leqslant \ln x) \quad \text{donc} \quad \Pr(\ln U \leqslant x) = \Pr\left(U \leqslant e^{\ln(x)}\right) = \Pr(Y \leqslant x)$$

donc $\ln U$ suit une loi normale de paramètres $\mu - \frac{v^2}{2}$ et v^2 donc U suit ben la loi log-normale de paramètres $\mu - \frac{v^2}{2}$ et v^2.

Partie III - La formule de Black et Scholes

10. (a) On considère deux cas :
   - Si $C \geqslant K \iff C - K \geqslant 0$, l'option vaut $C - K$.
   - Si $C < K \iff C - K < 0$, l'option vaut 0.

   Au final l'option vaut bien

$$\max(C-K, 0) = f(C-K).$$

   (b) Son placement vaudrait

$$\Pi_K + \Pi_K(e^r - 1) = \Pi_K(1 + (e^r - 1)) = \Pi_K e^r.$$

   (c) Pour avoir la même rentabilité moyenne, il faut

$$E(\Pi_K e^r) = E(f(C-K))$$

   et comme $\Pi_K e^r$ est constant, on obtient

$$\Pi_K e^r = E(f(C-K)) \iff \Pi_K = e^{-r}E(f(C-K)).$$

11. (a) f est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \to x$ est continue et sur $\mathbb{R}_-^*$ car $x \to 0$ est continue.

   De plus $f(0) = \max(0,0) = 0$, et

$$\lim_{x\to 0, x>0} x = \lim_{x\to 0, x<0} 0 = 0 = f(0)$$

   donc f est continue en 0.

   Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(b) La continuité de f permet d'utiliser le théorème de transfert.

Pour cela on doit déterminer la loi suivie par la variable $C-K$, et surtout l'écrire à l'aide d'une loi log-normale de paramètres 0 et σ^2 (c'est la seule dont on a l'expression d'une densité).

On sait que
$$C \hookrightarrow \mathcal{LN}(m, v^2) \quad \text{donc} \quad C' = e^{-m}C \hookrightarrow \mathcal{LN}(0, v^2).$$
On obtient alors
$$f(C-K) = f(e^m e^{-m}C - K) = f(e^m C' - K).$$
Sous réserve de convergence absolue on peut donc écrire :
$$E(f(C-K)) = \int_0^{+\infty} f(e^m x - K)\frac{1}{xv\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x)^2}{2v^2}}\ dx.$$
L'analyse du résultat à trouver (voir le carré dans l'exponentielle) conduit à poser le changement de variable (de classe C^1 mais pas affine, donc à poser sur un segment uniquement puis on fait tendre vers 0 et $+\infty$) :
$$y - m = \ln x \Longleftrightarrow y = m + \ln x \quad \text{et} \quad x = e^{-m}e^y \quad \textit{puis} \quad dx = e^{-m}e^y\ dy.$$
Cela donne
$$E(f(C-K)) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(e^y - K)e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}}\ dy$$
et il reste à expliciter f :
$$e^y - K \geqslant 0 \Leftrightarrow e^y \geqslant K \Leftrightarrow y \geqslant \ln K$$
donc $f(e^y - K)$ est nulle avant $\ln K$ et égale à $e^y - K$ ensuite :
$$E(f(C-K)) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln K} 0\ dy + \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln K}^{+\infty}(e^y - K)e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}}\ dy = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln K}^{+\infty}(e^y - K)e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}}\ dy.$$
Il reste à prouver la convergence absolue de cette intégrale pour obtenir l'existence de cette espérance.

Comme la fonction intégrée est positive, (f et l'exponentielle le sont), la convergence absolue est équivalent à la convergence.

Elle n'est généralisée qu'en $+\infty$, on passe par une théorème de comparaison en étudiant la limite de :
$$\frac{e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}}}{\frac{1}{y^2}} = y^2(e^y - K)e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}} = e^{2\ln(y) + y - \frac{(y-m)^2}{2v^2}} - Ke^{2\ln(y) - \frac{(y-m)^2}{2v^2}}$$
qui vaut 0 en $+\infty$ par croissances comparées, permet d'écrire que
$$(e^y - K)e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}} = o\left(\frac{1}{y^2}\right)$$
et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2}\ dy$ converge (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives on obtient la convergence puis l'absolue convergence de l'intégrale, et $f(C-K)$ admet une espérance qui vaut :
$$E(f(C-K)) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln K}^{+\infty}(e^x - K)e^{-\frac{(x-m)^2}{2v^2}}\ dx.$$

12. (a) On sépare Par linéarité l'intégrale donnant l'espérance en deux intégrales, toutes deux convergentes.

La deuxième, plus simple, est $\frac{-K}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln K}^{+\infty} e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}}$.

On se donne une variable aléatoire A suivant la loi normale de paramètres m et v^2.

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{-K}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln K}^{+\infty} e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}} &= -K\Pr(A \geqslant \ln K) = -K\Pr\left(\frac{A-m}{v} \geqslant \frac{\ln K - m}{v}\right) = -K\left[1-\Phi\left(\frac{\ln K - m}{v}\right)\right] \\ &= -K\Phi\left(\frac{m-\ln K}{v}\right).\end{aligned}$$

La deuxième intégrale vaut $\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln K}^{+\infty} e^{y-\frac{(y-m)^2}{2v^2}}\,dy$.

Pour la calculer, il faut repenser au changement de variable utilisé dans la première partie pour calculer l'espérance de la loi log-normale, car l'intégrale était sous la même forme.

On pose donc $t = \frac{y-m}{v} - v$.

Après tous les calculs, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{v\sqrt{2\pi}}\int_{\ln K}^{+\infty} e^{y-\frac{(y-m)^2}{2v^2}}\,dy &= e^{m+\frac{v^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K - m}{v}-v}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = e^{m+\frac{v^2}{2}}\left[1-\Phi\left(\frac{\ln K - m - v^2}{v}\right)\right] \\ &= e^{m+\frac{v^2}{2}}\Phi\left(\frac{v^2+m-\ln K}{v}\right)\end{aligned}$$

Enfin on en déduit que

$$\Pi_K = e^{-r}\left[e^{m+\frac{v^2}{2}}\Phi\left(\frac{v^2+m-\ln K}{v}\right) - K\Phi\left(\frac{m-\ln K}{v}\right)\right]$$

donc

$$\Pi_K = e^{m-r+\frac{v^2}{2}}\Phi\left(\frac{v^2+m-\ln K}{v}\right) - Ke^{-r}\Phi\left(\frac{m-\ln K}{v}\right).$$

(b) Question évidente, on remplace m par la formule donnée et on obtient bien le résultat demandé.

13. (a) Ψ est de classe C^1 comme somme, produit et composée, et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas ($v > 0$) de fonctions de classe C^1.

De plus on a

$$\Psi'(v) = \left(\frac{-\theta}{v^2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2}{2}} - e^{-\theta}\left(\frac{-\theta}{v^2}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{\theta}{v}-\frac{v}{2}\right)^2}{2}}.$$

Attention à l'arnaque ici : on n'est pas obligé de faire 20 lignes de calculs, mais il faut expliquer rapidement le principe : on fait passer le $e^{-\theta}$ dans l'exponentielle générale, on développe tout dans cette exponentielle, on simplifie puis on refactorise, et (miracle !!), on retrouve $e^{-\frac{\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2}{2}}$ qui va permettre de factoriser :

$$\Psi'(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2}{2}}\left(\frac{-\theta}{v^2}+\frac{1}{2}+\frac{\theta}{v^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right)^2}{2}}.$$

On obtient $\Psi'(v) > 0$ donc Ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, puis en prenant les limites à l'intérieur de chaque exponentielle on a

$$\Psi(v) \xrightarrow[v\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \Psi(v) \xrightarrow[v\to 0^+]{} \begin{cases} 1-e^{-\theta} & \text{si } \theta > 0 \\ 0 & \text{si } \theta = 0 \\ 0 & \text{si } \theta < 0 \end{cases}$$

que l'on peut rassembler dans deux tableaux de variations :
– Si $\theta > 0$,

x	0		$+\infty$
$\Psi''(v)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
$\Psi(v)$	$1-e^{-\theta}$	$\nearrow$	$+\infty$

– Si $\theta \leqslant 0$,

x	0		$+\infty$
$\Psi''(v)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
$\Psi(v)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) On remarque que

$$1-e^{-\theta} \leqslant 0 \Longleftrightarrow e^{-\theta} \geqslant 1 \Longleftrightarrow -\theta \geqslant 0 \Longleftrightarrow \theta \leqslant 0.$$

Cela permet de rassembler les deux cas précédent et on obtient :

$$\lim_{v \to 0} \Psi(v) = \max(1-e^{-\theta}, 0).$$

Ψ est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans son image $\left]\lim_{0} \Psi; \lim_{+\infty} \Psi\right[= \left]\max(1-e^{-\theta}, 0); 1\right[$.

Pour que x admette un antécédent (forcément unique puisque Ψ est bijective, ce qui justifie qu'on parle de **la** volatilité implicite) par Ψ, il faut et il suffit donc que $x \in]f(1-e^{-\theta}); 1[$ ce qui s'écrit encore :

$$f\left(1-e^{-\theta}\right) < x < 1.$$