Correction DM ESSEC n° 11 :

Exercice : HEC 2007

1. On étudie $T-\lambda I$ et par des opérations très simples ($L_2 \leftrightarrow L_3$ puis $L_3 \leftarrow L_3+(\lambda-1)L_2$ on obtient une matrice triangulaire avec une diagonale égale à $(1-\lambda, 1, -\lambda(\lambda-1)$, ce qui donne $\operatorname{Sp} t = \operatorname{Sp} T = \{0;1\}$.

   On résout ensuite les équations $TX = X$ et $TX = 0$ et on trouve $E_1 = \operatorname{Vect}(e_1)$ de dimension 1 et $E_0 = \operatorname{Vect}(e_1 - e_3)$ de dimension 1, donc la somme des dimensions des sous-espaces propre vaut 2 et t n'est pas diagonalisable.
   Enfin $0 \in \operatorname{Sp} t$ donc t n'est pas bijective.

2. (a) On a directement les coordonnées des images des vecteurs de la base donc
   $T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1\cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0\cdots & 0 \end{pmatrix}$ avec la colonne de 1 qui est au milieu de la matrice $((2n+1+1)/2 = n+1)$.

   (b) L'image est engendrée par e_1 et $(1, \cdots, 1)$ qui forment une famille libre, donc une base de $\operatorname{Im}(t)$.
   Donc la dimension de l'image est 2 et (th du rang) $\dim(\ker(t)) = 2n+1-1 = 2n-1$.

   (c) Comme $\dim(\ker(t)) = 2n-1 \geqslant 1$, le noyau de $t - 0\mathrm{Id}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et $0 \in \operatorname{Sp} t$.

   Grâce à la dimension, pour en avoir une base, il nous suffit de trouver une famille libre de $2n-1$ vecteurs de $\ker(t)$
   (on en a aussi l'équation paramètrée avec $t(x_1, \cdots, x_{n+1}, \ldots, x_{2n+1}) = 0$)
   Pour $i \neq n+1$ on a $t(e_1 - e_i) = e_1 - e_1$; on retire le vecteur $e_1 - e_1$ qui est nul et ne sert à rien et on obtient :

   $((e_1 - e_i))_{i \in [[2,2n+1]],\ i \neq n+1}$ est une famille de $2n-1$ vecteurs de $\ker(t)$ qui est échelonnée donc libre, c'est une base de $\ker t$.

3. Si $v \in \operatorname{Im}(t \circ t)$ alors il existe $w \in E$ tel que $t \circ t(w) = v$ donc $t(t(w)) = v$ et $v \in \operatorname{Im}(t)$ (il est l'image de $t(w)$)
   Donc $\operatorname{Im}(t \circ t) \subset \operatorname{Im}(t)$.

4. Soit $\tilde{t}$ l'endomorphisme défini sur $\operatorname{Im}(t)$ par : pour tout x de $\operatorname{Im}(t)$, $\tilde{t}(x) = t(x)$
   $\sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i = (1, \cdots, 1)$ et on a vu précédemment que $\mathcal{B} = \left(e_1, \sum\limits_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ constitue une base de $\operatorname{Im}(t)$.
   On a $\tilde{t}(e_1) = t(e_1) = e_1$ qui a pour coordonnées $(1,0)$ dans $\mathcal{B}$.
   On a ensuite :

   $$\tilde{t}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right) = \sum_{i=1}^{2n+1} t(e_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n+1}}^{2n+1} t(e_i) + t(e_{n+1}) = 2n \cdot e_1 + \sum_{i=1}^{2n+1} e_i.$$

   qui a pour coordonnées $(2n, 1)$ dans $\mathcal{B}$.
   La matrice de $\tilde{t}$ dans $\mathcal{B}$ est donc $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. (a) Soit λ une valeur propre non nulle de t, et x un vecteur propre associé à λ.
   On a alors $t(x) = \lambda x$ et donc $x = \frac{1}{\lambda} t(x) = t\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ donc x appartient à $\operatorname{Im}(t)$.

(b) $\ker(t)$ est un sous espace propre de dimension $2n-1$
Les autres vecteurs propres sont dans $\mathrm{Im}\,(t)$, donc sont vecteurs propres de $\tilde{t}$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. qui est triangulaire et admet pour unique valeur propre 1, donc $t(x) = x$ et $\lambda = 1$ (comme valeur propre de t cette fois !), qui donne $\mathrm{Sp}\, t = \{0; 1\}$.

Le sous espace propre associé à 1 est inclus dans $\mathrm{Im}\,(t)$. Mais il n'est pas $\mathrm{Im}\,(t)$ tout entier sinon on aurait $\tilde{t} = \mathrm{Id}$, ce qui est incompatible avec sa matrice.
Donc le sous espace propre associé à 1 est de dimension strictement inférieure à 2, et donc de dimension 1.
La somme des dimensions des sous espaces propres est donc $2n \neq 2n+1$, et t n'est pas diagonalisable.

<u>Problème</u> : ESSEC II 2010

I Généralités sur la loi exponentielle

1. (a) X suit la loi exponentielle de paramètre μ donc admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(X) = \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\mu^2}.$$

(b) Par théorème de transfert et relation de Chasles, on s'intéresse à l'absolue convergence de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_\mu(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \mu \int_0^{+\infty} t^n e^{-\mu t}\, dt.$$

La première intégrale converge absolument et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle, la seconde est l'intégrale d'une fonction positive, qui n'est généralisée qu'en $+\infty$. Or :

$$\frac{t^n e^{-\mu t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2} e^{-\mu t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad t^n e^{-\mu t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

au voisinage de $+\infty$. De plus l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge absolument (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\mu t}\, dt$ converge absolument.

On obtient finalement que X^n admet une espérance pour tout n et on obtient une relation de récurrence par intégration par parties :

$$E(X^{n+1}) = \int_0^{+\infty} \mu t^{n+1} e^{-\mu t}\, dt.$$

On se place entre 0 et x et on pose :

$$u = t^{n+1} \quad \text{et} \quad v = -e^{-\mu t}$$

qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, avec

$$u' = (n+1)t^n \quad \text{et} \quad v' = \mu e^{-\mu t}.$$

L'intégration par parties donne :

$$\int_0^x \mu t^{n+1} e^{-\mu t}\, dt = \left[-t^{n+1} e^{-\mu t}\right]_0^x + (n+1) \int_0^x t^n e^{-\mu t}\, dt = -x^{n+1} e^{-\mu x} + \frac{n+1}{\mu} \int_0^x \mu t^{n+1} e^{-\mu t}\, dt.$$

On fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient (le terme devant l'intégrale tend vers 0 par croissances comparées) :

$$E(X^{n+1}) = \frac{n+1}{\mu} E(X^n).$$

(c) On en déduit alors que :

$$E(X_n) = \frac{n}{\mu}E(X^{n-1}) = \frac{n(n-1)}{\mu^2}E(X^{n-2}) = \cdots = \frac{n(n-1)\times\cdots\times 1}{\mu^n}E(X^0)$$

et comme $X^0 = 1$ est une variable certaine dont l'espérance vaut 1, on obtient :

$$E(X_n) = \frac{n!}{\mu^n}.$$

(d) D'où par formule de Koenig-Huyghens,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}.$$

2. (a) Pour tout $x \geqslant 0$,

$$\mathrm{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu t}\, dt = e^{-\mu t} > 0.$$

Pour tous réels positifs x et y, $(X > x+y) \subset (X > x)$ donc :

$$\mathrm{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \frac{\mathrm{P}[(X > x) \cap (X > x+y)]}{\mathrm{P}(X > x)} = \frac{\mathrm{P}[(X > x+y)]}{\mathrm{P}(X > x)} = \frac{e^{-\mu(x+y)}}{e^{-\mu x}} = e^{-\mu y} = \mathrm{P}(X > y)$$

(b) i. f est continue strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc $R(x) = 1 - F_X(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est $-f(x)$, strictement négative.

De plus par propriétés d'une fonction de répartition on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x) = 0$, limite qui n'est jamais atteinte car R est strictement décroissante. D'où :

$$\forall x \geqslant 0 \quad , \quad R(x) > 0 = \lim_{t\to+\infty} R(t).$$

ii. On vient de voir que R est de classe C^1, on a de plus $(X > x+y) \subset (X > x)$ donc :

$$\mathrm{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \mathrm{P}(X > y) \iff \frac{\mathrm{P}[(X > x+y) \cap (X > x)]}{\mathrm{P}(X > x)} = \mathrm{P}(X > y) \iff \frac{R(x+y)}{R(x)} = R(y)$$

$$\iff R(x+y) = R(x)R(y).$$

On dérive cette relation par rapport à y et on obtient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad R'(x+y) = R(x)R'(y).$$

Enfin on pose $y = 0$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad R'(x) = R(x)R'(0).$$

Or on a vu que $R'(x) = -f(x)$ et pour $x = 0$ on a : $R'(0) = -f(0) = -\mu$. On obtient bien finalement :

$$R'(x) + \mu R(x) = 0.$$

iii. Soit $g(x) = R(x)e^{\mu x}$, dérivable par composition de fonctions dérivables, on a

$$g'(x) = R'(x)e^{\mu x} + R(x)\mu e^{\mu x} = (R'(x) + \mu R(x))e^{\mu x} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+.$$

iv. On en déduit que $g(x)$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}^+$, donc pour tout $x \geqslant 0$,

$$R(x)e^{\mu x} = R(0)e^0 = R(0) = \mathrm{P}(X > 0) = \mathrm{P}(X \geqslant 0) = 1$$

car X est à densité, donc $\mathrm{P}(X = 0) = 0$, et positive donc $\mathrm{P}(X \geqslant 0) = 1$.

D'où on obtient pour tout x :

$$R(x) = e^{-\mu x} \iff F_X(x) = 1 - R(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

et on reconnaît la loi exponentielle de paramètre $\mu = f(0)$.

3. (a) On sait que $(Y \leqslant t) = (X_1 \leqslant t) \cap (X_2 \leqslant t)$ donc par indépendance de X_1 et X_2, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathrm{P}(Y \leqslant t) = \mathrm{P}[(X_1 \leqslant t) \cap (X_2 \leqslant t)] = \mathrm{P}(X_1 \leqslant t)\,\mathrm{P}(X_2 \leqslant t) = F_{X_1}(t)F_{X_2}(t) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1 - e^{-\mu_1 t}) \times (1 - e^{-\mu_2 t}) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de F_{X_1} et F_{X_2} qui le sont car X_1 et X_2 sont à densité, et de classe C^1 sur $[0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ donc Y est une variable à densité, et en dérivant F_Y sauf en 0 où on donne une valeur arbitraire, une densité de Y est :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu_1 e^{-\mu_1 t} + \mu_2 e^{-\mu_2 t} - (\mu_1 + \mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) On sait que $(Z > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > tt)$ donc par indépendance de X_1 et X_2, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathrm{P}(Z \leqslant t) = 1 - \mathrm{P}(Z > t) = 1 - \mathrm{P}[(X_1 > t) \cap (X_2 > t)] = 1 - \mathrm{P}(X_1 > t)\,\mathrm{P}(X_2 > t) \\ &= 1 - [1 - F_{X_1}(t)] \times [1 - F_{X_2}(t)] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On voit alors que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\mu_1 + \mu_2$.

II Fiabilité

1. On fait apparaître F_T puis R_T :

$$\mathrm{P}(t \leqslant T \leqslant t+h) = F_T(t+h) - F_T(t) = 1 - R_T(t+h) - (1 - R_T(t)) = R_T(t) - R_T(t+h).$$

2. Pour tout réel t positif ou nul,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{\mathrm{P}(t \leqslant T \leqslant t+h)}{h} &= \lim_{h \to 0, h > 0} \frac{R_T(t) - R_T(t+h)}{h} = -\lim_{h \to 0, h > 0} \frac{R_T(t+h) - R_T(t)}{h} \\ &= -R_T'(t) = f_T(t) \end{aligned}$$

car $R_T(t) = 1 - F_T(t)$ est dérivable au point t, de dérivée $-f_T(t)$.

3. (a) La question a déjà été traitée précédemment : f_T est continue strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $R_T(t) = 1 - F_T(t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $-f_T(t)$, strictement négative.

De plus par propriétés d'une fonction de répartition on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} R_T(t) = 0$, limite qui n'est jamais atteinte car R_T est strictement décroissante. D'où :

$$\forall t > 0 \quad , \quad R_T(t) > 0 = \lim_{t \to +\infty} R(t).$$

Enfin en $t = 0$, comme T est positive on a :

$$R_T(0) = 1 - F_T(0) = 1 - \mathrm{P}(T \leqslant 0) = 1 - 0 = 1 > 0.$$

(b) La fonction $t \to \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) = -\ln(R_T(t))$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par composition de fonctions dérivables car R_T est dérivable, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa dérivée est :

$$\frac{d}{dt}\left(-\ln(R_T(t))\right) = -\frac{R_T'(t)}{R_T(t)} = -\frac{-f_T(t)}{R_T(t)} = \lambda(t).$$

(c) On en déduit que $G(t) = -\ln(R_T(t))$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de λ, qui s'annule lorsque :

$$R_T(t) = 1 \Longleftrightarrow F_T(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0.$$

D'où on en déduit l'écriture :

$$-\ln(R_T(t)) = \int_0^t \lambda(x)\ dx \Longrightarrow \ln(R_T(t)) = -\int_0^t \lambda(x)\ dx \Longrightarrow R_T(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x)\ dx}.$$

4. (a) On dérive v, et on a vu précédemment que $R'_Z(t) = -f_Z(t) = -g(t)$:

$$v'(t) = 1 \times R_Z(t) + t \times R'_Z(t) = R_Z(t) - tg(t) \Longleftrightarrow tg(t) = R_Z(t) - v'(t).$$

(b) On écrit R_Z à l'aide d'une intégrale ce qui donne :

$$v(t) = tR_Z(t) = t\,\mathrm{P}(Z > t) = t\int_t^{+\infty} g(u)\ du = \int_t^{+\infty} tg(u)\ du \leqslant \int_t^{+\infty} ug(u)\ du$$

car pour tout $x \in [t; +\infty[$, $t \leqslant u$ donc $tg(u) \leqslant ug(u)$ et on intègre sur des bornes croissantes.

D'où on obtient

$$0 \leqslant v(t) \leqslant \int_t^{+\infty} ug(u)\ du$$

(cette intégrale converge bien car Z admet une espérance).

Or par relation de Chasles,

$$\int_t^{+\infty} ug(u)\ du = \int_0^{+\infty} ug(u)\ du - \int_0^t g(u)\ du.$$

De plus on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t g(u)\ du = \int_0^{+\infty} ug(u)\ du$ donc

$$\lim_{t\to+\infty} \int_t^{+\infty} ug(u)\ du = 0$$

et par théorème d'encadrement,

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0.$$

(c) Comme Z est à valeurs positives, l'intégrale de $-\infty$ à 0 est nulle donc :

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} tg(t)\ dt = \int_0^{+\infty} (R_Z(t) - v'(t))\ dt.$$

Etudions cette intégrale, en passant par l'intégrale partielle pour primitiver et faire apparaître $v(t)$:

$$\begin{aligned}\int_0^x (R_Z(t) - v'(t))\ dt &= \int_0^x R_Z(t)\ dt - \int_0^x v'(t)\ dt = \int_0^x R_Z(t)\ dt - [v(t)]_0^x = \int_0^x R_Z(t)\ dt - v(x) + v(0)\\ &= \int_0^x R_Z(t)\ dt - v(x).\end{aligned}$$

car $v(0) = 0 \times R_Z(0) = 0$. D'où

$$\int_0^x R_Z(t)\ dt = \int_0^{+\infty} tg(t)\ dt - v(x).$$

De plus on sait que $\int_0^x tg(t)\ dt$ converge en $+\infty$ vers $E(Z)$ et $v(x)$ converge vers 0.

D'où $\int_0^{+\infty} R_Z(t)\ dt$ converge et vaut $E(Z)$, ce qui donne bien :

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} R_Z(t)\ dt.$$

5. (a) Pour tout réel x positif, comme $(T > x + t) \subset (T > t)$,

$$R_{T_t}(x) = \mathrm{P}_{[T>t]}(T > t + x) = \frac{P\left([T > t] \cap [T > t + x]\right)}{P(T > t)} = \frac{P(T > x + t)}{P(T > t)} = \frac{R_T(t + x)}{R_T(t)}$$

(b) Il faut prouver queT_t admet une espérance pour utiliser le résultat ci-dessus.

Puisque T_t est trivialement positive, et $F_{T_t} = 1 - R_{T_t}$, on obtient :

$$F_{T_t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction est de classe C^1 donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0, de plus elle est continue sur $\mathbb{R}$ car par continuité de R_T :

$$F_{T_t}(0) = \lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)} = 1 - \frac{R_T(t)}{R_T(t)} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} 0 = 0.$$

On en déduit que T_t est à densité, et une densité de T_t est donnée par :

$$f_{T_t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{f_T(t+x)}{R_T(t)} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Enfin comme l'intégrale sur $\mathbb{R}_-$ est nulle, sous réserve de convergence absolue et avec le changement de variable $v = x + t$ et la linéarité de l'intégrale on a :

$$E(T_t) = \int_0^{+\infty} x \frac{f_T(t+x)}{R_T(t)}\, dx = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} (v-t) f_T(v)\, dv = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} v f_T(v)\, dv - \frac{t}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} f_T(v)\, dv$$

Or la première intégrale converge absolument car T admet une espérance, et la seconde car T est à densité : on en déduit que T_t admet bien une espérance.

La question 4c donne alors :

$$E(T_t) = \int_0^{+\infty} R_{T_t}(u)\, du = \frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t+u)\, du$$

et avec le changement de variable affine $v = t + u$ on obtient finalement :

$$E(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(v)\, dv.$$

6. (a) Si $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, alors pour tout $t \geqslant 0$:

$$R_T(t) = \mathrm{P}(T > t) = e^{-\mu t} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu.$$

(b) On remarque que $T = \min(T_1, T_2)$ donc avec la fin de la partie I on sait que T suit la loi exponentielle de paramètre $\mu_1 + \mu_2$.

On en déduit avec la question précédente que : pour tout $t \geqslant 0$,

$$R_T(t) = \mathrm{P}(T > t) = e^{-(\mu_1+\mu_2)t} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \mu_1 + \mu_2.$$

(c) On remarque que $T = \max(T_1, T_2)$ donc d'après la partie I, pour $t \geqslant 0$:

$$F_T(t) = 1 - e^{\mu_1 t} - e^{\mu_2 t} + e^{-(\mu_1+\mu_2)t} \quad \text{donc} \quad R_T(t) = 1 - F_T(t) = e^{\mu_1 t} + e^{\mu_2 t} - e^{-(\mu_1+\mu_2)t}.$$

7. (a) $\varphi_{n,\beta}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ et sur $]-\infty; 0[$, donc positive sur $\mathbb{R}$ et continue sauf peut-être en 0.

De plus on a $\varphi_{n,\beta}(t) = \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \times \beta t^{n-1} e^{-\beta t}$.

On calcule $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\, dt$; on reconnaît l'intégrale définissant l'espérance de X^{n-1} où X suit une loi exponentielle de paramètre β, donc on sait que cette intégrale converge absolument et :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\, dt = \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \times \frac{(n-1)!}{\beta^{n-1}} = 1.$$

De plus l'intégrale de $-\infty$ à 0 de $\varphi_{n,\beta}$ converge et vaut 0 car c'est l'intégrale de la fonction nulle.

On obtient finalement que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\, dt$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\, dt = 1$ donc $\varphi_{n,\beta}$ est une densité de probabilité.

(b) On a par définition :

$$R_T(t) = \mathrm{P}(T > t) = \int_t^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(u)\ du = 1 - \int_0^t \varphi_{n,\beta}(u)\ du.$$

On montre alors le résultat par récurrence sur $n \geqslant 1$:

- Pour $n = 1$, $\varphi_{1,\beta}(t) = \beta e^{-\beta t}$ donc on reconnaît la loi exponentielle de paramètre β, et on a vu :

$$R_T(t) = e^{-\beta t}$$

Or on a calcule facilement :

$$e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{0} \frac{(\beta t)^k}{k!} = e^{-\beta t}$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

- Supposons qu'il existe n tel que la propriété soit vraie pour $\varphi_{n,\beta}$, on a alors :

$$\int_0^t \varphi_{n,\beta}(u)\ du = 1 - e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}.$$

Calculons R_T pour $\varphi_{n+1,\beta}$:

$$R_T(t) = 1 - \frac{\beta^n}{n!} \int_0^t u^n \times \beta e^{-\beta u}\ du.$$

On pose

$$v = u^n \quad \text{et} \quad w = -e^{-\beta u}$$

qui sont de classe C^1 sur $[0; t]$ avec :

$$v' = nu^{n-1} \quad \text{et} \quad w' = \beta e^{-\beta u}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
R_T(t) &= 1 - \frac{\beta^n}{n!} \left(\left[-u^n e^{-\beta u} \right]_0^t + n \int_0^t u^{n-1} e^{-\beta u}\ du \right) \\
&= 1 + \frac{\beta^n}{n!} \times t^n e^{-\beta t} - 0 - \int_0^t \frac{\beta}{(n-1)!} (\beta u)^{n-1} e^{-\beta u}\ du \\
&= 1 + e^{-\beta t} \frac{(\beta t)^n}{n!} - \left[1 - e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} \right] \\
&= 1 - 1 + e^{-\beta t} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + \frac{(\beta t)^n}{n!} \right] \\
&= e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\beta t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

- Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, si T suis la loi d'Erlang de paramètres n et β, on a :

$$R_T(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}.$$

Remarque : on pouvait aussi (c'est d'ailleurs plus simple) poser $F(t) = 1 - e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$ et la dériver pour prouver que c'est une primitive de $\varphi_{n,\beta}$ puis l'utiliser pour calculer l'intégrale. D'ailleurs on pouvait aussi l'utiliser pour la question précédente (obtenir que c'est une densité de probabilité).

8. (a) La fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est positive et continue sur $[0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$, donc positive sur $\mathbb{R}$ et continue sauf peut-être en 0.

Son intégrale de $-\infty$ à 0 converge et vaut 0 car c'est l'intégrale de la fonction nulle.

Pour $x \geqslant 0$, on considère

$$\int_0^x \psi_{\beta,\eta}(t)\ dt = \left[-e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\right]_0^x = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

donc l'intégrale de 0 à $+\infty$ et par suite l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ convergent et valent toutes deux 1.

La fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est donc une densité de probabilité.

(b) On a vu qu'on sait primitiver $\psi_{\beta,\eta}$, on peut donc calculer, avec $t \geqslant 0$:

$$R_T(t) = 1 - \mathrm{P}(T \leqslant t) = 1 - \int_{-\infty}^0 0\ dx - \int_0^t \psi_{\beta,\eta}(x)\ dx = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\right) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}.$$

On en déduit que pour tout $t \geqslant 0$,

$$\lambda(t) = \frac{\psi_{\beta,\eta}(t)}{R_T(t)} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}.$$

(c) $\frac{\beta}{\eta}$ et $\frac{1}{\eta}$ sont des constantes strictement positives, la limite dépend de la constante $\beta - 1$ qui peut être nulle :

- Si $\beta = 1 \iff \beta - 1 = 0$, alors
$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{\eta}.$$
(On retrouve à nouveau le cas de la loi exponentielle, car pour $\beta = 1$, la loi de Weibull est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\eta}$).

- Si $\beta > 1 \iff \beta - 1 > 0$, alors
$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty.$$

III Système Poissonien

1. (a) Le théorème de transfert donne la formule immédiatement, à condition de prouver la convergence absolue de la série.

Or pour tout $s \in [0;1]$, et pour tout $k \geqslant 0$, on a :

$$0 \leqslant s \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant s^k \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \mathrm{P}(N_u = k)s^k \leqslant \mathrm{P}(N_u = k)$$

et la série de terme général $\mathrm{P}(N_u = k)$ converge absolument (c'est la somme des probabilités sur un système complet d'évènement, la série vaut même 1) donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série cherchée converge absolument.

On en déduit finalement que $G_u(s)$ existe pour tout $s \in [0;1]$ et :

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N_u = k)s^k.$$

(b) Par définition de G et en faisant apparaître astucieusement les hypothèses données par l'énoncé :

$$G_{u+v}(s) = E\left(s^{N_{u+v}}\right) = E\left(s^{N_u + (N_{u+v} - N_u)}\right) = E\left(s^{N_u} s^{(N_{u+v} - N_u)}\right).$$

Or les variables N_u et $(N_{u+v} - N_u)$ sont indépendantes d'après l'énoncé, donc par lemme des coalitions s^{N_u} et $S^{N_{u+v}-N_u}$ le sont aussi donc :

$$G_{u+v}(s) = E\left(s^{N_u}\right) E\left(s^{(N_{u+v}-N_u)}\right) = G_u(s) E\left(s^{(N_{u+v}-N_u)}\right).$$

L'énoncé dit aussi que $N_{u+v} - N_u$ suit la même loi que $N_{(u+v)-u} = N_v$ donc

$$E\left(s^{(N_{u+v}-N_u)}\right) = E(s^{N_v}) = G_v(s)$$

et enfin

$$G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s).$$

2. (a) On fait apparaître un terme strictement positif dans la somme (le premier) :

$$G_1(s) = E(s^{N_1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N_1 = k) s^k = \mathrm{P}(N_1 = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(N_1 = k) s^k.$$

Or $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(N_1 = k) s^k \geqslant 0$ donc $G_1(s) \geqslant \mathrm{P}(N_1 = k) > 0$ d'après l'énoncé.

(b) Une récurrence immédiate donne

$$G_{\sum\limits_{i=1}^{n} u_i}(s) = \prod_{i=1}^{n} G_{u_i}(s)$$

donc en posant $u_1 = \cdots = u_k = 1$,

$$G_k(s) = \prod_{i=1}^{k} G_1(s) = G_1(s)^k = e^{k \ln G_1(s)} = e^{-k\theta(s)}.$$

(c) De même en utilisant la propriété énoncée au début de la question b,

$$G_1(s) = G_{\sum\limits_{i=1}^{q} \frac{1}{q}}(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q.$$

D'où

$$G_{\frac{1}{q}}(s) = G_1(s)^{\frac{1}{q}} = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}.$$

(d) On fait la même opération sur

$$G_p(s) = G_{\sum\limits_{i=1}^{q} \frac{p}{q}}(s) = \left(G_{\frac{p}{q}}(s)\right)^q$$

donc

$$\psi(r) = (\psi(p))^{\frac{1}{q}} = \left(e^{-p\theta(s)}\right)^{\frac{1}{q}} = e^{-\frac{p}{q}\theta(s)} = e^{-r\theta(s)}.$$

(e) Question très difficile, qui utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Celle-ci dit que pour tout réel u, il existe deux suites u_n et v_n de rationnels adjacentes ayant pour limite u. On a donc pour tout n,

$$u_n \leqslant u \leqslant v_n.$$

De plus l'énoncé dit que la fonction $u \to N_u$ est croissante.
D'où pour tous $u \leqslant v$ on a, avec $s \leqslant 1$ donc $\ln(s) \geqslant 1$:

$$N_u \leqslant N_v \Longrightarrow \ln(s) N_u \geqslant \ln(s) N_v \Longrightarrow e^{\ln(s) N_u} \geqslant e^{\ln(s) N_v} \Longrightarrow s^{N_u} \leqslant s^{N_v} \Longrightarrow E(s^{N_u}) \geqslant E(s^{N_v}).$$

Enfin on en déduit que

$$u \leqslant v \Longrightarrow G_u(s) \geqslant G_v(s) \Longrightarrow \psi(u) \geqslant \psi(v)$$

et la fonction ψ est décroissante, ce qui permet d'écrire :

$$u_n \leqslant u \leqslant v_n \Longrightarrow \psi(u_n) \geqslant \psi(u) \geqslant \psi(v_n)$$

Comme u_n et v_n sont des rationnels on a pour tout n,

$$\psi(u_n) = e^{-u_n\theta(s)} \quad \text{et} \quad \psi(v_n) = e^{-v_n\theta(s)}$$

Comme le réel s est fixé, la fonction $u \to e^{-u\theta(s)}$ est continue et on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-u_n\theta(s)} = \lim_{n\to+\infty} e^{-v_n\theta(s)} = e^{-u\theta(s)} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \psi(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \psi(v_n) = e^{-u\theta(s)}.$$

Par encadrement on en déduit que

$$\psi(u) = e^{-u\theta(s)} \quad \text{et enfin} \quad G_u(s) = e^{-u\theta(s)}.$$

(f) On utilise l'équivalent usuel de l'exponentielle, avec $h \to 0 \Longrightarrow -h\theta(s) \to 0$ (avec s fixé) :

$$\frac{G_h(s)-1}{h} = \frac{e^{-h\theta(s)}-1}{h} \underset{0}{\sim} \frac{-h\theta(s)}{h} = -\theta(s) \xrightarrow[h\to 0, h>0]{} = -\theta(s).$$

3. On part du côté droit, plus compliqué, et on simplifie :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N_h=1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h=k)(s^k-1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h=k)s^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h=k) \\
&= \left[G_h(s) - \mathrm{P}(N_h=0)\times s^0\right] - \left[1-\mathrm{P}(N_h=0)\right] \\
&= G_h(s) - 1 - \mathrm{P}(N_h=0) + \mathrm{P}(N_h=0) \\
&= G_h(s) - 1.
\end{aligned}$$

4. Comme on ne peut pas échanger la limite et la somme infinie, on procède par encadrement :

$$0 \leqslant s \leqslant 1 \Longrightarrow \forall k \geqslant 2, \quad 0 \leqslant s^k \leqslant 1 \Longrightarrow \forall k \geqslant 2, \quad -1 \leqslant s^k - 1 \leqslant 0$$

puis on somme les inégalités pour k allant de 2 à $+\infty$ et on divise par $h > 0$:

$$0 \leqslant s \leqslant 1 \Longrightarrow -\frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h=k)}{h} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h=k)(s^k-1)}{h} \leqslant 0$$

et l'énoncé dit que le terme de gauche de l'encadrement tend vers 0 lorsque h tend vers 0^+ donc par encadrement :

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h=k)(s^k-1)}{h} = 0.$$

5. (a) D'après la question 3,

$$\frac{G_h(s)-1}{h} = \frac{P(N_h=1)(s-1) + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h} = \frac{P(N_h=1)(s-1)}{h} + \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h}.$$

On en déduit avec la question 4 que :

$$\frac{P(N_h=1)(s-1)}{h} = \frac{G_h(s)-1}{h} - \frac{\sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(N_h=k)(s^k-1)}{h} \xrightarrow[h\to 0, h>0]{} -\theta(s) - 0 = -\theta(s).$$

D'où on tire que si $s-1 \neq 0 \Longleftrightarrow s \neq 1$,

$$\frac{P(N_h=1)}{h} \xrightarrow[h\to 0, h>0]{} -\frac{\theta(s)}{s-1} = \frac{\theta(s)}{1-s}.$$

et cette limite, notée α, est positive puisque c'est la limite d'un quotient de facteurs positifs et vérifie bien pour $s \in [0;1[$:

$$\theta(s) = \alpha(1-s).$$

Si $s = 1$, il faut prouver que $\theta(1) = 0$ pour généraliser la relation. Or

$$G_1(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_1 = k)1^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N_1 = k) = 1$$

donc

$$\theta(1) = -\ln(G_1(1)) = -\ln(1) = 0.$$

On obtient bien qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\alpha = \lim\limits_{h \to 0, h>0} \frac{\mathrm{P}(N_h=1)}{h}$ et que pour pour tout $s \in [0,1]$, $\theta(s) = \alpha(1-s)$.

(b) On calcule :

$$G_u(0) = \mathrm{P}(N_u = 0) \times 0^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(N_u = k) \times 0^k = \mathrm{P}(N_u = 0)$$

et l'énoncé donne

$$\forall u > 0, \quad 0 < \mathrm{P}(N_u = 0) < 1.$$

On en déduit que

$$0 < G_1(0) < 1 \Longrightarrow \ln(G_1(0)) < 0 \Longrightarrow \theta(0) = -\ln(G_1(0)) > 0.$$

Enfin on remarque qu'en posant $s = 0$, on a :

$$\theta(0) = \alpha(1-0) = \alpha > 0.$$

6. (a) On a $\theta(s) = \alpha(1-s)$ donc :

$$G_u(s) = e^{-u\theta(s)} = e^{-u\alpha(1-s)} = e^{-\alpha u} e^{\alpha s u}.$$

Or la série exponentielle prise en $x = \alpha s u$ donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha s u)^k}{k!} = e^{\alpha s u}$$

donc pour tout $s \in [0;1]$,

$$G_u(s) = e^{-\alpha u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha s u)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right] s^k.$$

(b) On a obtenu : pour tout $s \in [0;1]$, en posant X qui suit la loi de Poisson de paramètre (αu) : on a $N_u(\Omega) = X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(N_u = k)s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)s^k.$$

Cela n'assure pas forcément que les termes de la série sont égaux deux à deux. L'idée pour l'obtenir est de poser $s = 0$, qui donne les termes $s = 0$ égaux.

Puis on retire ces termes, on divise par s (pour $s > 0$) et on prend la limite lorsque s tend vers 0 (d'une somme infinie, donc par encadrement), qui donne l'égalité pour $s = 0$.

Enfin on prend $s = 0$ et les termes 1 sont égaux, puis on réitère.... ce qui se traite rigoureusement par récurrence :

Montrons par récurrence sur k que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $P(N_u = i) = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^i}{i!}$.

Initialisation : on prend la relation précédente pour $s = 0$. Tous les termes pour $k \geqslant 1$ s'annulent en on obtient $P(N_u = 0) = \mathrm{P}(X = 0)$.

Hérédité : on suppose que pour tout $k \leqslant i$ (récurrence forte), $P(N_u = k) = \mathrm{P}(X = k)$.

On obtient alors en retirant les termes égaux que pour tout $s \in [0; 1]$:

$$\sum_{k=i+1}^{+\infty} P(N_u = k)s^k = \sum_{k=i+1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)s^k$$

Pour tout $s > 0$ (pour pouvoir diviser) on en déduit que :

$$\sum_{k=i+1}^{+\infty} P(N_u = k)s^{k-i-1} = \sum_{k=i+1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)s^{k-i-1}$$

et on sépare le premier terme de chaque somme et on isole la probabilité cherchée :

$$\mathrm{P}(N_u = i+1) = \mathrm{P}(X = i+1) + s\left(\sum_{k=i+2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)s^{k-i-2} - \sum_{k=i+2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)s^{k-i-2}\right)$$

Or, sur le modèle de la question 1a, on peut encadrer les séries : pour Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (donc cela s'applique à X et N_u) on a ;

$$0 \leqslant \mathrm{P}(Y = k)s^{k-i-2} \leqslant \mathrm{P}(Y = k) \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant \sum_{k=i+2}^{+\infty} \mathrm{P}(Y = k)s^{k-i-2} \leqslant \sum_{k=i+2}^{+\infty} \mathrm{P}(Y = k) \leqslant 1.$$

Donc on obtient que :

$$-1 \leqslant \left(\sum_{k=i+2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)s^{k-i-2} - \sum_{k=i+2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)s^{k-i-2}\right) \leqslant 1$$

puis

$$-s \leqslant s\left(\sum_{k=i+2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)s^{k-i-2} - \sum_{k=i+2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k)s^{k-i-2}\right) \leqslant s$$

et par encadrement, le terme central tend vers 0 lorsque s tend vers 0, ce qui donne finalement :

$$\mathrm{P}(N_u = i+1) = \mathrm{P}(X = i+1)$$

et la propriété est vraie au rang $i + 1$.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(N_u = k) = \mathrm{P}(X = k)$$

et N_u suit la même loi que X, donc la loi de Poisson de paramètre (αu).

7. $(T > t) = (N_t = 0)$ donc pour tout t on a :

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(N_t = 0) = e^{-\alpha t} \quad \text{donc} \quad \mathrm{P}(T \leqslant t) = 1 - e^{-\alpha t}.$$

D'autre part $\mathrm{P}(T \leqslant t) = 0$ si $t \leqslant 0$ car il ne peut pas y avoir de panne avant l'instant de mise en marche.

On reconnaît bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre α.

8. (a) N_{t+h} est le nombre de panne à l'instant $t + h$ et N_t le nombre de pannes à l'instant t donc $N_{t+h} - N_t$ représente bien le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t; t + h]$.

(b) Question pas difficile mais fastidieuse.

L'énoncé dit que $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ suit la même loi que N_h, et on obtient, une par une, toutes les propriétés du processus de Poisson à l'aide de celles vérifiées par N_h.

(c) On applique la question 7 à la famille $(\tilde{N}_h)_{h \geqslant 0}$ et on obtient le résultat.

(d) Question mal posée : le taux de défaillance du système après t n'a jamais été défini, et sur ce système, les pannes sont réparées, contrairement au cas où on avait défini le taux de défaillance du système.

Il faut comprendre que la taux de défaillance après t est le taux de défaillance de la variable T_t définie à la question II5.

Or T puis T_t suivent des lois exponentielles de paramètre α (remarquer que $T_t = \tilde{T}$), donc le taux de défaillance est constant égal à α (question II6a).