HEC 2016 - Correction

Exercice

1. (a) On effectue les produits matriciels et on trouve

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \dots & x_1 x_n \\ x_1 x_2 & x_2^2 & \dots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 x_n & x_2 x_n & \dots & x_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

On remarque que A est symétrique, elle est donc diagonalisable.

(b) On remarque que toutes les colonnes de A sont colinéaires à X, et qu'au moins une est non nulle puisque l'un au moins des carrés de x_i est non nul. On en déduit donc que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(X)$$

et (X) est une base de $\operatorname{Im} f$ puisqu'il est non nul.

On en déduit que Ker f est de dimension n-1. De plus en posant k un élément de [1; n] tel que $x_k \neq 0$, on peut construire une famille de vecteurs de Ker f en posant, pour tout $i \neq k$,

$$f_i = x_k e_i - x_i e_k$$

et cette famille est échelonnée donc libre, admet n-1 vecteurs : c'est donc une base de Ker f et Ker $f = \text{Vect}((f_i)_{i \neq k})$.

(c) On calcule:

$$AX = (X^{t}X)X = X(^{t}XX) = X(\alpha) = \alpha X$$

On en déduit que X est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\alpha \neq 0$, et on a vu précédemment que 0 était valeur propre avec un sous-espace propre de dimension n-1. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut dépasser n, il n'y a pas d'autre valeur propre et $\dim(E_{\alpha}(f)) = 1$ ce qui permet d'obtenir :

$$\operatorname{Sp}(f) = \{0; \alpha\}$$
, $E_0(f) = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((f_i)_{i \neq k})$, $E_{\alpha}(f) = \operatorname{Vect}(X)$

2. (a) Les colonnes de V sont libres donc forment une base de $\operatorname{Im} V$, qui est donc de dimension p. On en déduit bien que $\operatorname{rg}(V) = p$.

On en déduit ensuite par le théorème du rang que

$$\dim(\operatorname{Ker} g) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) - \dim(\operatorname{Im} g) = p - p = 0$$

donc $\operatorname{Ker} g = \{0\}.$

(b) Supposons que VY = 0, alors ${}^tVVY = {}^tV0 = 0$.

Réciproquement supposons que ${}^{t}VVY=0$. On multiplie par ${}^{t}Y$ à gauche et on obtient :

$${}^tY^tVVY = 0$$
 donc ${}^t(VY)VY = 0$

En notant $VY = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$, on en déduit que $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$, et comme tous les termes de la somme sont positifs, il sont forcément tous nuls.

On obtient finalement que $a_i^2 = 0$ pour tout $i \in [1; n]$, et donc $a_i = 0$ pour tout i, puis VY est le vecteur nul.

Les deux sens étant obtenus, on a bien :

$$VY = 0 \Longleftrightarrow^t VVY = 0$$

(c) Cette matrice est carrée d'ordre n, cherchons son noyau; à l'aide de la question 2b on obtient :

$${}^{t}VVY = 0 \Longleftrightarrow VY = 0 \Longleftrightarrow Y \in \operatorname{Ker} V$$

On en déduit que $Ker(^tVV) = Ker V$. Or la question 2a a montré que $Ker V = \{0\}$, donc $Ker(^tVV) = \{0\}$ et tVV est bien inversible.

Problème

Partie I

1. (a) On calcule:

$$f(x,y) = \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1-1/2}{y}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}\right)^{-1} = \left(\frac{y+x}{2xy}\right)^{-1} = \frac{2xy}{x+y}$$

Comme $x+y \neq 0$ puisque x et y sont strictement positifs, f est alors de classe C^2 par opérations élémentaires et on peut calculer sans difficulté :

$$\partial_1(f)(x,y) = \frac{2y^2}{x+y}$$
 , $\partial_2(f)(x,y) = \frac{2x^2}{x+y}$

(b) w est de classe C^{∞} par opérations élémentaires, donc U l'est aussi. On calcule de plus :

$$U'(t) = w'(t) - w'(t) - tw''(t) = -tw''(t) \quad , \quad U''(t) = -w''(t) - tw'''(t)$$

Calculons alors les dérivées de w :

$$w'(t) = \frac{2}{(1+t)^2}$$
 , $w''(t) = -\frac{4}{(1+t)^3}$, $w'''(t) = \frac{12}{(1+t)^4}$

ce qui permet de donner :

$$U'(t) = \frac{4t}{(1+t)^3} \quad , \quad U''(t) = \frac{4}{(1+t)^3} - \frac{12t}{(1+t)^4} = \frac{4(1-2t)}{(1+t)^4}$$

donc U' est strictement positive et U est strictement croissante, et d'après le signe de U'' elle est convexe sur]0;1/2] et concave sur $[1/2;+\infty[$.

Reste les limites de U pour son tableau de variations : par opérations élémentaires, avec

$$U(t) = \frac{2t}{1+t} - \frac{2t}{(1+t)^2}$$

on obtient $\lim_{t\to 0^+} U(t)=0$ et en factorisant par t dans 1+t dans les deux fractions on obtient la transformation suivante :

$$U(t) = \frac{2}{1 + \frac{1}{t}} - \frac{2}{t\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 2$$

donc U est strictement croissante de $]0; +\infty[$ dans]0; 2[.

(c) Partons du côté droit : on obtient

$$yw(z) = y \times \frac{2\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}} = \frac{2x}{\frac{y+x}{y}} = \frac{2xy}{x+y} = f(x,y).$$

(d) De même on part du côté droit:

$$w'(z) = \frac{2}{\left(1 + \frac{x}{y}\right)^2} = \frac{2}{\left(\frac{y+x}{y}\right)^2} = \frac{2y^2}{(x+y)^2} = \partial_1(f)(x,y)$$

et d'autre part

$$U(z) = w(z) - zw'(z) = \frac{f(x,y)}{y} - \frac{x}{y} \times \frac{2y^2}{(x+y)^2} = \frac{2x}{x+y} - \frac{2xy}{(x+y)^2} = \frac{2x(x+y) - 2xy}{(x+y)^2} = \frac{2x^2}{(x+y)^2} = \frac{2}{(x+y)^2} = \frac{2}{(x+y)^$$

2. (a) On reprend la forme générale et on calcule :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \left(c\lambda^{\theta} x^{\theta} + (1-x)\lambda^{\theta} y^{\theta}\right)^{1/\theta} = \left(\lambda^{\theta} \left[cx^{\theta} + (1-x)y^{\theta}\right]\right)^{1/\theta} = (\lambda^{\theta})^{1/\theta} \times f(x, y) = \lambda f(x, y)$$

(b) f est de classe C^2 par opérations élémentaires avec x > 0 et y > 0, et par suite $cx^{\theta} + (1-x)y^{\theta} > 0$ puisque $c \in]0; 1[$, donc c et 1-c sont strictement positifs.

On peut alors calculer pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$:

$$\partial_1(f)(x,y) = c\theta x^{\theta-1} \times \frac{1}{\theta} \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} = cx^{\theta-1} \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

et

$$\partial_2(f)(x,y) = (1-c)\theta y^{\theta-1} \times \frac{1}{\theta} \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} = (1-c)y^{\theta-1} \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

(c) Avec c>0, x>0 et $cx^{\theta}+(1-c)y^{\theta}>0$ on obtient immédiatement $\partial_1(f)(x,y)>0$, et de même avec 1-c>0 on obtient $\partial_2(f)(x,y)>0$.

Reste la monotonie. On dérive la fonction demandée, qui est la dérivée partielle par rapport à la première variable de $\partial_1(f)$, c'est donc :

$$\partial_{1,1}^2(f)(x,y) = c(\theta-1)x^{\theta-2} \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-1} + cx^{\theta-1} \times c\theta x^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) \left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right)^{\frac{1}{\theta}-2} + cx^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} -$$

On repère le facteur commun $A=cx^{\theta-2}\left(cx^{\theta}+(1-c)y^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}-2}$ qui est strictement positif :

$$\partial_{1,1}^2(f)(x,y) = A\left[(\theta - 1)(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta}) + c\theta x^{\theta} \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \right]$$

et en mettant la fraction au même dénominateur :

$$\partial_{1,1}^{2}(f)(x,y) = A(\theta - 1) \left[cx^{\theta} + (1 - c)y^{\theta} - cx^{\theta} \right] = A(\theta - 1)(1 - c)y^{\theta}$$

qui est strictement négative car A>0, c<1 donc $1-c>0, y^{\theta}>0$ et enfin $\theta<1$ donc $\theta-1<0$.

On en déduit que la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x,y)$ est strictement décroissante.

Enfin par symétrie des rôles de (x,c) et (y,1-c) on montre de même que

$$\partial_{2,2}^2(f)(x,y) = B(\theta-1)cx^{\theta}$$

avec $B = (1-c)y^{\theta-2}\left(cx^{\theta} + (1-c)y^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}-2}$, et pour les mêmes raisons cette dérivée est strictement négative donc $y\mapsto \partial_2(f)(x,y)$ est strictement décroissante.

3. (a) Avec les formules obtenues précédemment on obtient

$$G(x,y) = \frac{cx^{\theta-1}}{(1-x)y^{\theta-1}} = \frac{c}{1-c} \left(\frac{x}{y}\right)^{\theta-1} = g(z).$$

(b) On commence par calculer g', puis s(t) et enfin s(z): pour tout t > 0,

$$g'(t) = \frac{c}{1-c}(\theta - 1)t^{\theta-2}$$
 donc $s(t) = -\frac{\frac{c}{1-c}t^{\theta-1}}{t \times \frac{c}{1-c}(\theta - 1)t^{\theta-2}} = \frac{1}{1-\theta}$

qui est une constante, donc $s(z)=s(t)=\frac{1}{1-\theta}$. Cela confirme le nom de la fonction de production CES : l'élasticité de substitution est bien constante.

4. (a) En utilisant astucieusement la question 2a, on obtient immédiatement :

$$yw(z) = yf\left(\frac{x}{y}, 1\right) = f\left(y \times \frac{x}{y}, y \times 1\right) = f(x, y)$$

(b) U est dérivable par opérations élémentaires et pour t > 0 on a :

$$U'(t) = w'(t) - w'(t) - tw''(t) = -tw''(t).$$

Or on remarque que $w''(t) = \partial_{1,1}^2(f)(t,1)$ qui est strictement négative d'après la question 2c, donc U' est strictement positive et U est strictement croissante. Reste les limites de U: on calcule

$$U(t) = (ct^{\theta} + 1 - c)^{1/\theta} - t \times ct^{\theta - 1} (ct^{\theta} + 1 - c)^{1/\theta - 1} = (ct^{\theta} + 1 - c)^{1/\theta - 1} (ct^{\theta} + 1 - c - ct^{\theta})$$
$$= (1 - c) (ct^{\theta} + 1 - c)^{1/\theta - 1}.$$

Séparons les cas:

• 1er cas : $0 < \theta < 1$. Lorsque t tend vers 0^+ , t^θ tend alors vers 0^+ également, et on obtient

$$\lim_{t \to 0+} U(t) = (1-c) \times (1-c)^{1/\theta-1} = (1-c)^{1/\theta}.$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, t^{θ} tend alors vers $+\infty$ également, et comme $0 < \theta < 1$ donne $1/\theta > 1$, $1/\theta - 1 > 0$ et on obtient alors :

$$\lim_{t \to +\infty} U(t) = +\infty.$$

• 2e cas : $\theta < 0$. Lorsque t tend vers 0^+ , t^θ tend alors vers $+\infty$, donc l'intérieur de la puissance aussi. Mais comme $1/\theta < 0$, on obtient :

$$\lim_{t \to 0^+} U(t) = (1 - c) \times 0^+ = 0^+$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, t^{θ} tend alors vers 0, donc l'intérieur de la puissance tend vers 1-c et enfin :

$$\lim_{t \to +\infty} U(t) = (1-c) \times (1-c)^{1/\theta - 1} = (1-c)^{1/\theta}.$$

Remarque : dans ce deuxième cas, on peut vérifier qu'avec $\theta = -1$ et $c = \frac{1}{2}$ on retrouve les résultats de la question 1b (c'est bien le cas!)

Pour la convexité on calcule U'': On sait que U'(t) = -tw''(t) donc on commence par calculer:

$$w''(t) = c(\theta - 1)t^{\theta - 2} \left(ct^{\theta} + 1 - c\right)^{1/\theta - 1} + c^{2}\theta t^{2\theta - 2} \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \left(ct^{\theta} + 1 - c\right)^{1/\theta - 2}$$

$$= ct^{\theta - 2} \left(ct^{\theta} + 1 - c\right)^{1/\theta - 2} \left[(\theta - 1)(ct^{\theta} + 1 - c) + ct^{\theta}(1 - \theta)\right]$$

$$= c(\theta - 1)t^{\theta - 2} \left(ct^{\theta} + 1 - c\right)^{1/\theta - 2} (1 - c)$$

$$= c(1 - c)(\theta - 1)t^{\theta - 2} \left(ct^{\theta} + 1 - c\right)^{1/\theta - 2}$$

Donc

$$U'(t) = c(1-\theta)(1-c)t^{\theta-1} \left(ct^{\theta} + 1 - c\right)^{1/\theta-2}$$

Puis on dérive et on obtient :

$$U''(t) = c(1-\theta)(1-c) \left[(\theta-1)t^{\theta-2} \left(ct^{\theta} + 1 - c \right)^{1/\theta-2} + t^{\theta-1} \left(\frac{1}{\theta} - 2 \right) c\theta t^{\theta-1} \left(ct^{\theta} + 1 - c \right)^{1/\theta-3} \right]$$

$$c(1-\theta)(1-c)t^{\theta-2} \left(ct^{\theta} + 1 - c \right)^{1/\theta-3} \left[(\theta-1) \left(ct^{\theta} + 1 - c \right) + c(1-2\theta)t^{\theta} \right]$$

$$= \underbrace{c(1-\theta)(1-c)t^{\theta-2} \left(ct^{\theta} + 1 - c \right)^{1/\theta-3}}_{>0} \left[-\theta ct^{\theta} + (1-c)(\theta-1) \right]$$

Ainsi U est convexe si et seulement si :

$$U''(t) > 0 \Longleftrightarrow -\theta c t^{\theta} + (1 - c)(\theta - 1) > 0 \Longleftrightarrow \theta t^{\theta} < \frac{(1 - c)(\theta - 1)}{c}$$

On dissocie alors deux cas:

• Si $0 < \theta < 1$, l'inégalité devient

$$t^{\theta} < \frac{(1-c)(\theta-1)}{c\theta}$$

et comme $\frac{(1-c)(\theta-1)}{c\theta}<0$ et $t^{\theta}>0$, l'inégalité n'est jamais vérifiée. Ainsi, U est concave sur \mathbb{R}_+^* .

• Si $\theta < 0$: Alors l'inégalité devient :

$$t^{\theta} > \frac{(1-c)(\theta-1)}{c\theta} \Longleftrightarrow t > \left(\frac{(1-c)(\theta-1)}{c\theta}\right)^{1/\theta}$$

En effet comme $\theta < 0$, $1/\theta$ également et la fonction $t \mapsto t^{1/\theta}$ est strictement décroissante.

$$U \text{ est donc convexe sur } \left]0; \left(\frac{(1-c)(\theta-1)}{c\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \right[\text{ et concave sur } \left[\left(\frac{(1-c)(\theta-1)}{c\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}; +\infty\right[.$$

Partie II.

5. (a) v est de classe C^2 car Ψ l'est, puis on calcule sans difficulté :

$$v'(t) = \partial_1(\Psi)(t,1)$$

En posant y=1, l'énoncé donne $t\mapsto \partial_1(\Psi)(t,1)=v'(t)$ strictement positive, donc v est strictement croissante, et v'(t) strictement décroissante, donc v est concave.

(b) φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et on a :

$$\varphi'(t) = v'(t) - v'(t) - tv''(t) = -tv''(t) \ge 0$$

puisque $v''(t) \leq 0$ grâce à la concavité de v. On en déduit que φ est croissante, donc pour tout t > 0,

$$\varphi(t) \geqslant \lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = \mu \geqslant 0$$

On en déduit que φ est positive. De plus en posant t=1 on a

$$\mu \leqslant \varphi(1) = v(1) - v'(1) = \Psi(1,1) - \partial_1(\Psi)(1,1) = 1 - \partial_1(\Psi)(1,1) < 1$$

puisque $\partial_1(\Psi)(1,1) > 0$ d'après les hypothèses.

(c) La relation $\lambda \Psi(x,y) = \Psi(\lambda x, \lambda y)$ permet d'écrire :

$$yv(z) = y\Psi\left(\frac{x}{y}, 1\right) = \Psi\left(y \times \frac{x}{y}, y\right) = \Psi(x, y)$$

6. (a) Dérivons par rapport à x puis y la relation de la question 5c:

$$\Psi(x,y) = yv\left(\frac{x}{y}\right)$$

donc

$$\partial_1(\Psi)(x,y) = y \times \frac{1}{y}v'\left(\frac{x}{y}\right) = v'(z)$$

puis

$$\partial_2(\Psi)(x,y) = v\left(\frac{x}{y}\right) + y \times \frac{-x}{y^2}v'\left(\frac{x}{y}\right) = v(z) - \frac{x}{y}v'(z) = v(z) - zv'(z) = \varphi(z)$$

et enfin leur quotient donne :

$$\frac{\partial_1(\Psi)(x,y)}{\partial_2(\Psi)(x,y)} = \frac{v'(z)}{\varphi(z)} = h(z).$$

(b) On a vu que v' est strictement positive et que φ également, donc h est strictement positive. On en déduit que σ est du signe opposé de h'(t), qu'on calcule :

$$h'(t) = \frac{v''(t)\varphi(t) - v'(t)\varphi'(t)}{\varphi(t)^2}$$

et finalement $\sigma(t)$ est du signe de $v'(t)\varphi'(t) - v''(t)\varphi(t)$. On se rappelle que $\varphi'(t) = -tv''(t)$ et σ est donc du même signe que :

$$-tv'(t)v''(t) - v''(t)[v(t) - tv'(t)] = v''(t)[-tv'(t) - v(t) + tv'(t)] = -v(t)v''(t)$$

et on a vu que v'' est négative et $v(t) = \Psi(t,1)$ est strictement positive car l'énoncé dit que Ψ est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

Enfin on en déduit que $\sigma(t)$ est positif.

7. (a) On dérive ℓ , et on remarque que $1-r=\frac{1}{\sigma_0}$:

$$\ell'(t) = (1 - r)t^{-r}h(t) + t^{1-r}h'(t) = t^{-r}\left(\frac{1}{\sigma_0}h(t) + th'(t)\right)$$

Or la définition de $\sigma(t)$ donne :

$$\sigma_0 = \sigma(t) = -\frac{h(t)}{th'(t)}$$

done

$$\ell'(t) = t^{-r} \left(-th'(t) + th'(t) \right) = 0.$$

On en déduit que ℓ est constante, égale à sa valeur en 1, donc pour tout t > 0:

$$\ell(t) = \ell(1) = 1^{1-r}h(1) = h(1)$$

et enfin on obtient:

$$h(t) = \frac{\ell(t)}{t^{1-r}} = h(1)t^{r-1}.$$

(b) La question est tout à fait infaisable. On doit d'abord penser à transformer la relation à obtenir sur v pour faire apparaître une fonction dont on devra montrer qu'elle est constante. Pour cela on écrit :

$$v(t) = \left(\frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)}\right)^{1/r} \Longleftrightarrow v(t)^r = \frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)} \Longleftrightarrow \frac{v(t)^r}{1 + h(1)t^r} = \frac{1}{1 + h(1)}.$$

Posons alors $a(t) = \frac{v(t)^r}{1 + h(1)t^r}$ et calculons sa dérivée :

$$a'(t) = \frac{rv'(t)v(t)^{r-1}(1+h(1)t^r) - rh(1)t^{r-1}v(t)^r}{(1+h(1)t^r)^2} = \frac{rv(t)^{r-1}}{(1+h(1)t^r)^2} \times \left[v'(t)(1+h(1)t^r) - h(1)t^{r-1}v(t)\right]$$

Reste à montrer que le facteur entre crochet est nul pour obtenir que a est constante. Pour cela on doit se servir d'une relation entre v, v' et h: la relation de définition de h est utile, d'autant que h est connue, mais fait intervenir φ . Mais en prenant la définition de φ , on voit qu'elle s'écrit en fonction de v et v' et on obtient :

$$h(t) = h(1)t^{r-1} = \frac{v'(t)}{v(t) - tv'(t)}$$

On va isoler v(t) dans cette relation pour le remplacer dans l'expression au-dessus :

$$[v(t) - tv'(t)]h(1)t^{r-1} = v'(t)$$
 donc $v(t)h(1)t^{t-1} = v'(t)[1 + t^rh(1)]$

et en prenant la différence, on montre donc que le crochet à droite dans l'expression de a'(t) est nul, donc a'(t) est nulle et enfin a est une constante. Or on peut calculer :

$$a(1) = \frac{v(1)^r}{1 + h(1)1^r} = \frac{\Psi(1, 1)^r}{1 + h(1)} = \frac{1^r}{1 + h(1)} = \frac{1}{1 + h(1)}.$$

On en déduit que pour tout t > 0,

$$a(t) = a(1) = \frac{1}{1 + h(1)}$$

et enfin en remontant les équivalences du début de la question,

$$v(t) = \left(\frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)}\right)^{1/r}$$

(c) On peut alors calculer à l'aide de la question 5c :

$$\Psi(x,y) = yv\left(\frac{x}{y}\right) = y\left(\frac{1+h(1)\frac{x^r}{y^r}}{1+h(1)}\right)^{1/r} = y\left(\frac{\frac{y^r+h(1)x^r}{y^r}}{1+h(1)}\right)^{1/r} = y\left(\frac{1}{y^r}\right)^{1/r}\left(\frac{1}{1+h(1)}y^r + \frac{h(1)}{1+h(1)}x^r\right)^{1/r}$$

On peut alors poser $a = \frac{h(1)}{1+h(1)}$ et on calcule sans difficulté $1 - a = \frac{1+h(1)-h(1)}{1+h(1)} = \frac{1}{1+h(1)}$ qui sont tous les deux strictement positifs car on a vu précédemment que h est strictement positive.

On en déduit que a > 0 et que 1 - a > 0 donc a < 1. Enfin on a bien $a \in]0;1[$ et

$$\Psi(x,y) = (ax^{r} + (1-a)y^{r})^{1/r}$$

- (d) La question 3b montre qu'une fonction de production CES a bien une élasticité de substitution constante, et la question 7c montre qu'une fonction de production admettant une élasticité de substitution constante a la forme d'une fonction de production CES : ce sont donc les seules fonctions de production ayant cette propriété.
- 8. (a) On prend le logarithme de S_t :

$$H_t(r) = \frac{1}{r} \ln \left(at^r + (1-a) \right) = \frac{1}{r} \ln \left(ae^{r \ln t} + (1-a) \right)$$

Lorsque r tend vers 0, c'est encore le cas de $r \ln t$, donc $e^{r \ln t}$ tend vers 1, et l'intérieur du logarithme tend vers 1. On a une forme indéterminée, mais on peut alors remarquer que

$$ae^{r \ln t} - a \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

donc avec $\ln(1+u) \sim u$ on obtient :

$$H_t(r) \underset{r \to 0}{\sim} \frac{ae^{r \ln t} - a}{r} = \frac{a(e^{r \ln t} - 1)}{r}$$

Nouvel équivalent usuel avec cette fois $e^u-1 \underset{0}{\sim} u$ pour obtenir :

$$H_t(r) \underset{r \to 0}{\sim} \frac{a \times r \ln t}{t} = a \ln t \xrightarrow[r \to 0]{} a \ln t.$$

En composant par l'exponentielle continue on obtient enfin :

$$S_t(r) \xrightarrow[r \to 0]{} e^{a \ln t} = t^a$$

(b) On déduit de la question précédente que

$$F(x,y) = yz^{a} = y\left(\frac{x}{y}\right)^{a} = y^{1-a}x^{a}.$$

Partie III.

9. (a) T_i est une fonction affine de R_i qui suit une loi normale, donc elle suit une loi normale. De plus la linéarité de l'espérance et la quadracité de la variance donnent

$$E(T_i) = au_i + b + E(R_i) = au_i + b$$
 et $V(T_i) = 1^2 V(R_i) = V(R_i) = \sigma^2$

donc T_i suit bien la loi normale annoncée.

- (b) Par lemme des coalitions, les R_i étant mutuellement indépendantes, les T_i le sont aussi.
- 10. (a) Commençons par exprimer "simplement" M(a,b) en fonction des notations précisées au-dessus :

$$\begin{split} M(a,b) &= \ln\left(\prod_{i=1}^n \varphi_i(t_i)\right) = \sum_{i=1}^n \ln\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(t_i - au_i - b)^2\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\ln\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right] - \frac{1}{2\sigma^2}(t_i - au_i - b)^2\right) \\ &= n \ln\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left[t_i^2 + a^2u_i^2 + b^2 - 2at_iu_i - 2bt_i + 2abu_i\right] \\ &= -n \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2\sigma^2} \left(n\overline{t^2} + na^2\overline{u^2} + nb^2 - 2na\overline{tu} - 2nb\overline{t} + 2nab\overline{u}\right) \\ &= -n \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{n}{2\sigma^2} \left(\overline{t^2} + a^2\overline{u^2} + b^2 - 2a\overline{tu} - 2b\overline{t} + 2ab\overline{u}\right) \end{split}$$

Cette fonction est de classe C^2 (polynômiale) et on peut calculer ses dérivées partielles premières :

$$\partial_1(M)(a,b) = -\frac{n}{2\sigma^2} \left(2a\overline{u^2} - 2\overline{t}\overline{u} + 2b\overline{u} \right) = -\frac{n}{\sigma^2} \left(a\overline{u^2} - \overline{t}\overline{u} + b\overline{u} \right)$$

puis

$$\partial_2(M)(a,b) = -\frac{n}{2\sigma^2} \left(2b - 2\overline{t} + 2a\overline{u}\right) = -\frac{n}{\sigma^2} \left(b - \overline{t} + a\overline{u}\right)$$

Enfin le gradient de M en (a,b) est le vecteur de \mathbb{R}^2 dont les coordonnées sont les dérivées partielles que l'on vient de calculer.

(b) et c) Par suite, les points critiques de M sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_1(M)(a,b) = 0 \\ \partial_2(M)(a,b) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a\overline{u^2} - \overline{tu} + b\overline{u} = 0 \\ b - \overline{t} + a\overline{u} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a\overline{u^2} - \overline{tu} + (\overline{t} - a\overline{u})\overline{u} = 0 \\ b = \overline{t} - a\overline{u} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a(\overline{u^2}\overline{u}^2) + \overline{t}\overline{u} - \overline{tu} = 0 \\ b = \overline{t} - a\overline{u} \end{cases} \iff \begin{cases} as_u^2 - \operatorname{cov}(u,t) = 0 \\ b = \overline{t} - a\overline{u} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2} \\ b = \overline{t} - \frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_u^2} \overline{u} \end{cases}$$

et ce système admet bien une unique solution (\hat{a}, \hat{b}) donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{a} = \frac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2} \\ \hat{b} = \overline{t} - \frac{\mathrm{cov}(u,t)}{s_u^2} \overline{u} \end{array} \right.$$

11. (a) On calcule les dérivées partielles secondes de M:

$$\partial_{1,1}^{2}(M)(a,b) = -\frac{n}{\sigma^{2}}\overline{u^{2}} = -\frac{n}{\sigma^{2}}\left(s_{u}^{2} + \overline{u}^{2}\right)$$

puis

$$\partial_{1,2}^2(M)(a,b) = -\frac{n}{\sigma^2}\overline{u} \quad , \quad \partial_{2,2}^2(M)(a,b) = -\frac{n}{\sigma^2}$$

et la Hessienne au pont (a, b) est bien :

$$\nabla^{2}(M)(a,b) = -\frac{n}{\sigma^{2}} \begin{pmatrix} s_{u}^{2} + \overline{u}^{2} & \overline{u} \\ \overline{u} & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Cette matrice étant constante, c'est encore la même au point critique. On cherche alors ses valeurs propres donc les λ tels que $\nabla^2(M)(a,b) - \lambda I$ n'est pas inversible. Comme on travaille en dimension 2 on peut se servir du déterminant de $\nabla^2(M)(a,b) - \lambda I$ dont on sait que les valeurs propres sont les racines de ce polynôme. On écrit :

$$\nabla^{2}(M)(a,b) - \lambda I = \begin{pmatrix} -\frac{n(s_{u}^{2} + \overline{u}^{2})}{\sigma^{2}} - \lambda & -\frac{n\overline{u}}{\sigma^{2}} \\ -\frac{n\overline{u}}{\sigma^{2}} & -\frac{n}{\sigma^{2}} - \lambda \end{pmatrix}$$

donc le déterminant est le polynôme :

$$P(\lambda) = \left(-\frac{n(s_u^2 + \overline{u}^2)}{\sigma^2} - \lambda\right) \times \left(-\frac{n}{\sigma^2} - \lambda\right) - \left(-\frac{n\overline{u}}{\sigma^2}\right)^2$$

On développe P:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{n}{\sigma^2} \left(1 + s_u^2 + \overline{u}^2 \right) \lambda + \frac{n^2}{\sigma^4} s_u^2$$

Notons α , β et γ les coefficients de ce polynôme. Remarquons que puisque la Hessienne est symétrique, elle admet au moins une valeur propre donc P admet au moins une racine. On en déduit que son discriminant $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ est positif ou nul.

On peut alors calculer les racines de P (qui sont éventuellement confondues si $\Delta=0$, mais la formule reste valable) :

$$\lambda_1 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$
 , $\lambda_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Or on sait que $\alpha = 1 > 0$ et $\beta = \frac{n}{\sigma^2} \left(1 + s_u^2 + \overline{u}^2 \right) > 0$, on en déduit que le numérateur de λ_1 est strictement négatif comme somme de termes négatifs dont un strictement, et le dénominateur est strictement positif, et finalement on a :

$$\lambda_1 < 0$$

C'est un peu plus compliqué pour λ_2 . De nouveau le signe ne dépend que du numérateur, et on remarque que $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<\beta^2$ car α et γ sont strictement positifs.

On en déduit alors que $\sqrt{\Delta} < \sqrt{\beta^2} = |\beta| = \beta$ puisque β est positif, et enfin on obtient

$$-\beta + \sqrt{\Delta} < 0$$
 donc $\lambda_2 < 0$

Les deux valeurs propres de la Hessienne étant strictement négatifs, M admet un maximum local au point critique (\hat{a}, \hat{b}) .

12. Simplifions cette différence :

$$\begin{split} M(\hat{a} + h, \hat{b} + k) - M(\hat{a}, \hat{b}) &= -n \ln \left(\sigma \sqrt{2\pi} \right) - \frac{n}{2\sigma^2} \left(\overline{t^2} + (\hat{a} + h)^2 \overline{u^2} + (\hat{b} + k)^2 - 2(\hat{a} + h) \overline{tu} - 2(\hat{b} + k) \overline{t} \right. \\ &+ 2(\hat{a} + h)(\hat{b} + k) \overline{u} \right) + n \ln \left(\sigma \sqrt{2\pi} \right) + \frac{n}{2\sigma^2} \left(\overline{t^2} + \hat{a}^2 \overline{u^2} + \hat{b}^2 - 2\hat{a} \overline{tu} - 2\hat{b} \overline{t} + 2\hat{a} \hat{b} \overline{u} \right) \\ &= -\frac{n}{2\sigma^2} \left(\overline{t^2} + (\hat{a} + h)^2 \overline{u^2} + (\hat{b} + k)^2 - 2(\hat{a} + h) \overline{tu} - 2(\hat{b} + k) \overline{t} \right. \\ &+ 2(\hat{a} + h)(\hat{b} + k) \overline{u} - \overline{t^2} - \hat{a}^2 \overline{u^2} - \hat{b}^2 + 2\hat{a} \overline{tu} + 2\hat{b} \overline{t} - 2\hat{a} \hat{b} \overline{u} \right) \end{split}$$

On développe l'intégralité de la formule, de nombreux termes s'éliminent et il va rester :

$$M(\hat{a}+h,\hat{b}+k)-M(\hat{a},\hat{b}) = -\frac{n}{2\sigma^2}\left(h^2\overline{u^2}+2\hat{a}h\overline{u^2}+k^2+2\hat{b}k-2h\overline{t}\overline{u}-2k\overline{t}+2\hat{a}k\overline{u}+2\hat{b}h\overline{u}+2hk\overline{u}\right)$$

On va alors injecter la relation $\hat{b} = \bar{t} - \hat{a}\bar{u}$, on obtient :

$$\begin{split} M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) - M(\hat{a},\hat{b}) &= -\frac{n}{2\sigma^2} \left(h^2 \overline{u^2} + 2\hat{a}h\overline{u^2} + k^2 + 2\overline{t}k - 2\hat{a}k\overline{u} - 2h\overline{t}\overline{u} - 2k\overline{t} + 2\hat{a}k\overline{u} + 2h\overline{t}\overline{u} \right. \\ &\qquad \qquad - 2\hat{a}h\overline{u}^2 + 2hk\overline{u} \Big) \\ &= -\frac{n}{2\sigma^2} \left(h^2 \overline{u^2} + 2\hat{a}h\overline{u^2} + k^2 - 2h\overline{t}\overline{u} + 2h\overline{t}\overline{u} - 2\hat{a}h\overline{u}^2 + 2hk\overline{u} \right) \end{split}$$

On rassemble alors certains termes proches, faisant apparaı̂tre s_u^2 et $\operatorname{cov}(u,t)$:

$$\begin{split} M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) - M(\hat{a},\hat{b}) &= -\frac{n}{2\sigma^2} \left(2h(\overline{t}\overline{u} - \overline{t}\overline{u}) + 2\hat{a}h(\overline{u^2} - \overline{u}^2) + h^2\overline{u^2} + k^2 + 2hk\overline{u} \right) \\ &= -\frac{n}{2\sigma^2} \left(-2h\operatorname{cov}(u,t) + 2\hat{a}hs_u^2 + h^2\overline{u^2} + k^2 + 2hk\overline{u} \right) \end{split}$$

On injecte enfin la formule $\hat{a} = \frac{\cos(u,t)}{s_u^2}$ donc $\hat{a}s_u^2 = \cos(u,t)$:

$$\begin{split} M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) - M(\hat{a},\hat{b}) &= -\frac{n}{2\sigma^2} \left(-2h \operatorname{cov}(u,t) + 2h \operatorname{cov}(u,t) + h^2 \overline{u^2} + k^2 + 2hk \overline{u} \right) \\ &= -\frac{n}{2\sigma^2} \left(h^2 \overline{u^2} + k^2 + 2hk \overline{u} \right) \end{split}$$

On remarque enfin qu'on a presque une identité remarquable sauf que le carré n'est pas au bon endroit par rapport à la moyenne. Mais on fait apparaître celui qu'il faut :

$$\begin{split} M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) - M(\hat{a},\hat{b}) &= -\frac{n}{2\sigma^2} \left(h^2 \overline{u^2} - h^2 \overline{u}^2 + h^2 \overline{u}^2 + k^2 + 2hk \overline{u} \right) \\ &= -\frac{n}{2\sigma^2} \left(h^2 s_u^2 + (h\overline{u}+k)^2 \right) \end{split}$$

qui est (enfin!!) clairement négatif ou nul, donc pour tout h et pour tout k on obtient :

$$M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) - M(\hat{a},\hat{b}) \leqslant 0 \iff M(\hat{a}+h,\hat{b}+k) \leqslant M(\hat{a},\hat{b})$$

et enfin en posant $h = a - \hat{a}$ et $k = b - \hat{b}$ on obtient que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$M(a,b) \leqslant M(\hat{a},\hat{b})$$

et M admet bien un maximum global atteint en (\hat{a}, \hat{b}) .

13. (a) L'énoncé donne à la ligne 4 l'équation de la régression de t en u ; par symétrie on en déduit que l'équation de la régression de u en t est :

$$u = \frac{\operatorname{cov}(u, t)}{s_t^2} t + \overline{u} - \frac{\operatorname{cov}(u, t)}{s_t^2} \overline{t}$$

Mais comme la droite est tracée avec u en abscisse, il faut renverser l'expression pour obtenir t en fonction de u:

$$u = \frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_t^2} t + \overline{u} - \frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_t^2} \overline{t} \iff \frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_t^2} t = u - \overline{u} + \frac{\operatorname{cov}(u,t)}{s_t^2} \overline{t}$$

$$\iff t = \frac{s_t^2}{\operatorname{cov}(s,u)} u - \frac{s_t^2}{\operatorname{cov}(s,u)} \overline{u} + \overline{t}$$

$$\iff t = \frac{s_t^2}{\operatorname{cov}(s,u)} (u - \overline{u}) + \overline{t}$$

ce qui donne informatiquement la ligne 5 suivante :

plot2d(u,variance(t)/corr(u,t,1)*(u-mean(u))+mean(t))

(b) Le point d'intersection des deux droites de régression est le point moyen $(\overline{u}, \overline{t})$.

(c) On en déduit en lisant les coordonnées de ce point d'intersection que :

$$\overline{u} \simeq 2$$
 et $\overline{t} \simeq 2, 8$

- (d) Les points observés sont proches de chacune des droites de régression dont les séries statistiques sont assez fortement corrélées. De plus le coefficient directeur est positif donc la corrélation est positive : le coefficient de corrélation est donc proche de 1.
- (e) On reconnaît que a0 est le coefficient directeur de la droite de régression de u en t donnée précédemment.

Ensuite on reconnaît dans b0 le terme constant de cette droite.

On en déduit que t0=a0*u+b0 donne la série statistique obtenue en régressant t à l'aide de u, c'est-à-dire la meilleure approximation de t par une fonction affine de u.

Ensuite en faisant e=t0-t, e est l'écart (algébrique, car on n'a pas pris la valeur absolue) entre t et son approximation t0

Enfin on met dans p le numéro des simulations effectuées puis on trace l'écart algébrique e entre t et t0 en fonction du numéro de la simulation correspondante.

Les points semblant répartis autour de 0, on peut conjecturer que la moyenne des ordonnées des 16 points vaut environ 0. Calculons-là mathématiquement par linéarité de l'espérance :

$$\overline{e} = \overline{t_0 - t} = \overline{t_0} - \overline{t} = a_0 \overline{u} + b_0 - \overline{t} = \frac{\operatorname{cov}(u, t)}{s_u^2} \overline{u} + \overline{t} - \frac{\operatorname{cov}(u, t)}{s_u^2} \overline{u} - \overline{t} = 0.$$

14. (a) Par linéarité de l'espérance, et avec $E(Y_i) = au_i + b$ vu au début de cette partie on obtient :

$$E(A_n) = \frac{1}{ns_u^2} \sum_{i=1}^n (u_i - \overline{u})(au_i + b) = \frac{1}{ns_u^2} \sum_{i=1}^n \left(au_i^2 + bu_i - a\overline{u}u_i - b\overline{u} \right)$$
$$= \frac{1}{ns_u^2} \left(na\overline{u^2} + nb\overline{u} - a\overline{u}^2 - b\overline{u} \right) = \frac{a}{s_u^2} \times \left(\overline{u^2} - \overline{u}^2 \right) = \frac{a}{s_u^2} \times s_u^2 = a$$

Ensuite par quadracité de la variance et indépendance des variables T_i on obtient :

$$V(A_n) = \frac{1}{n^2 s_u^4} \sum_{i=1}^n (u_i - \overline{u})^2 \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n^2 s_u^4} \sum_{i=1}^n (u_i - \overline{u})^2 = \frac{\sigma^2}{n^2 s_u^4} \times n s_u^2$$
$$= \frac{\sigma^2}{n s_u^2}$$

De plus à partir des T_i indépendantes et suivant toutes des lois normales, on compose par une fonction affine donc on obtient des variables indépendantes suivant des lois normales, on somme ces variables donc on obtient une variable suivant une loi normale, et enfin on compose à nouveau par une fonction affine et on obtient encore une loi normale. On en déduit que

$$A_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a, \frac{\sigma^2}{ns_u^2}\right)$$

(b) On cherche un intervalle de confiance sous la forme $[A_n - \varepsilon; A_n + \varepsilon]$ et on cherche la valeur de ε . On cherche alors à calculer $P(a \in [A_n - \varepsilon; A_n + \varepsilon])$ et pour cela on transforme l'évènement :

$$(a \in [A_n - \varepsilon; A_n + \varepsilon]) = (A_n - \varepsilon \leqslant a \leqslant A_n + \varepsilon) = (-\varepsilon \leqslant A_n - a \leqslant \varepsilon) = \left(-\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}} \leqslant \frac{A_n - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\right)$$

Or la variable $A_n^* = \frac{A_n - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n} s_n}}$ suit la loi normale centrée réduite donc on en déduit que :

$$P\left(a \in [A_n - \varepsilon; A_n + \varepsilon]\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\right)\right] = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\right) - 1$$

et on résout finalement l'équation :

$$P\left(a \in [A_n - \varepsilon; A_n + \varepsilon]\right) = 1 - \alpha \Longleftrightarrow 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\right) - 1 = 1 - \alpha \Longleftrightarrow \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \Phi(d_{\alpha})$$

et comme Φ est bijective on obtient finalement :

$$P\left(a \in [A_n - \varepsilon; A_n + \varepsilon]\right) = 1 - \alpha \Longleftrightarrow \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}} = d_\alpha \Longleftrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma d_\alpha}{\sqrt{n}s_u}$$

et finalement l'intervalle $\left[A_n - \frac{\sigma d_{\alpha}}{\sqrt{n}s_u}, A_n + \frac{\sigma d_{\alpha}}{\sqrt{n}s_u}\right]$ est un intervalle de confiance de a au niveau de confiance $1 - \alpha$.