Corrigé du devoir surveillé numéro 1

Exercice 1. : **ecricome 2008**
A tout couple (a,b) de deux réels, on associe la matrice $M(a,b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a,b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$E = \{M(a,b)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On note I la matrice identité $M(0,1)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. On a :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ tel que } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\,[I,A]$$

donc E est le sous-espace vectoriel engendré par une famille de deux matrices : c'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

La famille $[I,A]$ est génératrice de E. De plus ces deux matrices ne sont pas colinéaires donc la famille est libre : c'est donc une base de E, qui est donc de dimension 2.

2. Puisque l'énoncé a la bonté de nous suggérer les valeurs propres, on ne va pas chercher <u>toutes</u> les valeurs propres mais juste vérifier si les valeurs demandées sont bien des valeurs propres de A :
• $A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car les deux premières colonnes sont colinéaires ($C_2 = -C_1$). Ainsi 1 est bien <u>une</u> valeur propre de A.
• $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car ses colonnes sont aussi liées ($C_1 = C_3 - 2C_2$).
Ainsi 2 est bien <u>une</u> valeur propre de A.

3. $(A-I)(A-2I) = 0$.
Ainsi, le polynôme $P(X) = (X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A (car $P(A) = 0$).
D'après le cours, on sait que les seules valeurs propres possibles de A sont les racines de $P(X)$ (i.e. les solutions de $P(X) = 0$) donc les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 2.
De plus, on a prouvé à la question précédente que 1 et 2 sont bien des valeurs propres de A donc :

$$\text{Sp}(A) = \{1,2\}$$

4. On résout directement les systèmes $AX = X$ et $AX = 2X$:

$$AX = X \iff (A-I)X = 0 \iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

en faisant les pivots $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

D'où

$$AX = X \iff x = y + 2z \iff X = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_1(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ et la famille $\left[X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ est génératrice de $E_1(A)$, et libre car elle est composée de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $E_1(A)$, qui est de dimension 2.

$$AX = 2X \iff (A - 2I)X = 0 \iff \begin{cases} -y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

en faisant $L_1 \iff L_3$, $L_2 \leftarrow -L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$.

D'où

$$AX = 2X \iff \begin{cases} x = y + z = -2z + z = -z \\ y = -2z \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_2(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ et la famille $\left[X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ est génératrice de $E_2(A)$, et libre car elle est composée d'un unique vecteur, non nul.

C'est donc une base de $E_2(A)$, qui est de dimension 1.

5. • La famille a bien $3 = dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ vecteurs.
   • Vérifions qu'elle est libre :

   On résout l'équation $aX_1 + bX_2 + cX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'inconnues $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a & +2b & -c & = & 0 & (L_1) \\ a & & -2c & = & 0 & (L_2) \\ & b & +c & = & 0 & (L_3) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} a & +2b & -c & = & 0 & (L_1) \\ & -2b & -c & = & 0 & (L_2 < -L_2 - L_1) \\ & b & +c = & 0 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} a & +2b & -c & = & 0 & (L_1) \\ & -2b & -c & = & 0 & (L_2) \\ & & c & = & 0 & (L_3 < -2L_3 + L_2) \end{cases}$$

$$\iff a = b = c = 0$$

   <u>Conclusion :</u> La famille est libre et a le bon nombre de vecteurs donc c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

6. On transforme les bases trouvées pour correspondre aux conditions demandées :

$$E_2(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$E_1(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est constituée de trois vecteurs propres de A et c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc A est bien diagonalisable :
   On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P est constituée d'une base de vecteurs propres de A, respectivement associés aux valeurs propres 2, 1 et 1 qui constituent la diagonale de D, donc P est inversible et

$$A = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}AP$$

7. On calcule :

$$D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P = P^{-1}(aI + bA)P = aP^{-1}IP + bP^{-1}AP = aI + bD$$

est bien diagonale comme somme de deux matrices diagonales. On peut l'expliciter :

$$D(a,b) = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+2b & 0 & 0\\ 0 & a+b & 0\\ 0 & 0 & a+b\end{pmatrix}$$

8. On peut raisonner par équivalence (mais si on a le moindre doute, écrire une double implication !)

$[M(a,b)]^2 = I \iff PD(a,b)P^{-1}PD(a,b)P^{-1} = I \iff PD(a,b)^2P^{-1} = I \iff P^{-1}[PD(a,b)^2P^{-1}]P = P^{-1}[I]P = I$

donc

$$M(a,b)^2 = I \iff [D(a,b)]^2 = I \iff \begin{cases}(a+2b)^2 = 1\\ (a+b)^2 = 1\end{cases}$$

Cela donne $a + 2b = \pm 1$ et $a + b = \pm 1$.

- 1er cas : $a + 2b = -1$ et $a + b = -1$ donne $a = -1$ et $b = 0$ donc $M_1 = -I$.
- 2e cas : $a + 2b = -1$ et $a + b = 1$ donne $a = 3$ et $b = -2$ donc $M_2 = 3I - 2A$.
- 3e cas : $a + 2b = 1$ et $a + b = -1$ donne $a = -3$ et $b = 2$ donc $M_3 = -3I + 2A$.
- 4e cas : $a + 2b = 1$ et $a + b = 1$ donne $a = 1$ et $b = 0$ donc $M_4 = I$.

On obtient bien l'existence de quatre matrices exactement vérifiant $M(a,b)^2 = I$.

Exercice 2. : edhec 2014

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 6 & -1 & 2\\ 6 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

1. (a) On cherche une réduite triangulaire de $A - \lambda I$:

$$\begin{pmatrix}7-\lambda & 5 & 1\\ 6 & -1-\lambda & 2\\ 6 & 1 & 3-\lambda\end{pmatrix} \iff L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix}6 & 1 & 3-\lambda\\ 6 & -1-\lambda & 2\\ 7-\lambda & 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{c}L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow 6L_3 - (7-\lambda)L_1\end{array} \quad \begin{pmatrix}6 & 1 & 3-\lambda\\ 0 & -2-\lambda & \lambda-1\\ 0 & \lambda+23 & -\lambda^2+10\lambda-15\end{pmatrix}$$

$$\iff L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \quad \begin{pmatrix}6 & 1 & 3-\lambda\\ 0 & 21 & -\lambda^2+11\lambda-16\\ 0 & \lambda+23 & -\lambda^2+10\lambda-15\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{c}\\ L_3 \leftarrow 21L_3 - (\lambda+23)L_2\end{array} \quad \begin{pmatrix}6 & 1 & 3-\lambda\\ 0 & 21 & -\lambda^2+11\lambda-16\\ 0 & 0 & P(\lambda)\end{pmatrix}$$

où

$$P(\lambda) = 21 \times \left[-\lambda^2 + 10\lambda - 15\right] - (\lambda+23) \times \left[-\lambda^2 + 11\lambda - 16\right]$$

$$\begin{aligned}
&= 21 \times \left[-\lambda^2 + 10\lambda - 15\right] - \lambda \times \left[-\lambda^2 + 11\lambda - 16\right] - 23 \times \left[-\lambda^2 + 11\lambda - 16\right] \\
&= -21 \times 15 + 23 \times 16 + \lambda\left[21 \times 10 - +16 - 23 \times 11\right] + \lambda^2\left[-21 - 11 + 23\right] + \lambda^3 \\
&= 53 - 27\lambda - 9\lambda^2 + \lambda^3
\end{aligned}$$

Cette réduite est triangulaire, $A - \lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des coefficients de la diagonale est non nul, c'est à dire :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Longleftrightarrow \lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0.$$

(b) f est polynomiale donc de classe C^∞, et sa dérivée vaut, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3(x^2 - 6x - 9).$$

On étudie alors le signe de ce polynôme de degré 2 : son discriminant puis ses racines valent :

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 36 + 36 = 72 \quad , \quad x_1 = \frac{6 - \sqrt{72}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{72}}{2}.$$

Il est donc strictement positifs sur $]-\infty; x_1[$ et sur $]x_2; +\infty[$ et strictement négatif sur $]x_1; x_2[$ et nul en x_1 et x_2, et f est donc strictement croissante sur $]-\infty; x_1]$, strictement décroissante sur $[x_1; x_2]$ et strictement croissante sur $[x_1; +\infty[$.

Enfin en écrivant

$$f(x) = x^3\left[1 - \frac{9}{x} - \frac{27}{x^2} + \frac{53}{x^3}\right]$$

on obtient par opérations élémentaires que :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ce qui permet de donner le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

(c) On calcule sans difficultés :

$$f(0) = 53 \quad \text{et} \quad f(3) = 27 - 81 - 81 + 53 = -82.$$

Pour en déduire les signes de m et M, il faut placer ces points dans le tableau et donc comparer x_1 et x_2 avec 0 et 3 :

Comme $64 < 72 < 81$, on obtient que $8 < \sqrt{72} < 9$ et $-9 < -\sqrt{72} < -8$ puis :

$$-3 < 6 - \sqrt{72} < -2 \quad , \quad -\frac{3}{2} < x_1 < -1 \quad \text{et} \quad 14 < 6 + \sqrt{72} < 15 \quad , \quad 7 < x_2 < 7,5$$

Cela permet finalement d'assurer que :

$$x_1 < 0 < 3 < x_2$$

puis de compléter le tableau :

x	$-\infty$		x_1		0		3		x_2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	53	$\searrow$	-82	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit facilement avec le tableau que :

$$m < -82 < 53 < M$$

donc m est strictement négatif et M est strictement positif.

(d) f est strictement monotone et continue sur les intervalles $]-\infty; x_1]$, $[x_1; x_2]$ et $[x_2; +\infty[$ donc réalise trois bijections :

- de $]-\infty; x_1]$ dans $]-\infty; M]$ avec $0 \in]-\infty; M[$ donc elle passe une unique fois par 0 sur cet intervalle, en une valeur λ_1 telle que : $\lambda_1 < x_1$.

- de $[x_1; x_2]$ dans $[m; M]$ avec $0 \in]m; M[$ donc elle passe une unique fois par 0 sur cet intervalle, en une valeur λ_2 telle que : $x_1 < \lambda_2 < x_2$.

- de $[x_2; +\infty[]$ dans $[m; +\infty[$ avec $0 \in [m; +\infty[$ donc elle passe une unique fois par 0 sur cet intervalle, en une valeur λ_3 telle que : $\lambda_3 > x_2$.

Finalement $f(x) = 0$ admet exactement trois racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, qui sont exactement les valeurs propres de A d'après la question 1a.

Comme A admet 3 valeurs propres et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable et chacun des sous-espaces propres est de dimension 1. En remplissant D avec une base constituée de 3 vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3, on obtient bien :

$$A = PDP^{-1} \quad , \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

(a) $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); AM = MA\}$.
Montrons que E est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Soit $M_0 = 0_3$ la matrice nulle alors $AM_0 = 0_3 = M_0A$ donc $M_0 \in E$.
- Soient M_1 et M_2 appartenant à E (càd $AM_1 = M_1A$ et $AM_2 = M_2A$) , montrons que $M_1 + M_2$ appartient à E :

$$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$

- Soit M_3 appartenant à E (càd $AM_3 = M_3A$) et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que λM_3 appartient à E :

$$A(\lambda M_3) = \lambda AM_3 = \lambda M_3A = (\lambda M_3)A$$

(b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c & \\ d & e & f & \\ & g & h & i \end{pmatrix}$$

Alors N commute avec D si et seulement si :

$$\begin{aligned} DN = ND \iff & \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b & \lambda_1 c \\ \lambda_2 d & \lambda_2 e & \lambda_2 f \\ \lambda_3 g & \lambda_3 h & \lambda_3 i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b & \lambda_3 c \\ \lambda_1 d & \lambda_2 e & \lambda_3 f \\ \lambda_1 g & \lambda_2 h & \lambda_3 i \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1 - \lambda_2)b & (\lambda_1 - \lambda_3)c \\ (\lambda_2 - \lambda_1)d & 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)f \\ (\lambda_3 - \lambda_1)g & (\lambda_3 - \lambda_2)h & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Comme les λ_i sont distincts, les 6 équations en dehors de la diagonale donnent :

$$b = c = d = f = g = h = 0$$

et donc finalement

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

et les matrices qui commutent avec D sont bien exactement les matrices diagonales.

(c) On raisonne par équivalence :

$$M \in E \iff AM = MA \iff PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \iff P^{-1}(PDP^{-1}M)P = P^{-1}(MPDP^{-1})P$$

$$\iff D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D$$

donc M est une matrice de E si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec D.

(d) On peut alors chercher M :

$$M \in E \iff P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \iff M = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On décompose la matrice centrale en sortant les coefficients :

$$M \in E \iff M = aP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + eP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + iP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

donc E est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces trois matrices.

(e) Puisque

$$E = \text{Vect}\left[P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \ , \ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \ , \ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right]$$

E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la famille ci-dessus en est génératrice. Montrons qu'elle est libre :

$$aP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + bP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + cP \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = 0 \iff P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1} = 0$$

$$\iff P^{-1}P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}P = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff a = b = c = 0.$$

Cette famille est donc libre et génératrice de E, c'est est une base et la dimension de E est égale au cardinal de cette famille : $\dim(E) = 3$.

(f) Soit P un polynôme annulateur de A, on sait que $P(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de A.

P admet donc au moins trois racines (λ_1, λ_2, λ_3), il ne peut donc pas être de degré 0 (aucune racine), 1 (une racine), 2 (au plus deux racines) : soit il est nul, soit il est de degré supérieur ou égal à 3.

La famille (I, A, A^2) est composée de trois vecteurs qui sont bien dans E car :

$$AI = IA = A \quad , \quad AA = AA = A^2 \quad , \quad AA^2 = A^2A = A^3.$$

Montrons que cette famille est libre : soient a, b, c tels que :

$$aI + bA + cA^2 = 0$$

Alors le polynôme $P(x) = a + bx + cx^2$ est annulateur de A et de degré inférieur ou égal à 2 : d'après ce qui précède il est forcément nul, donc $P(x) = 0$ pour tout x et finalement $a = b = c = 0$.

La famille (I, A, A^2) est donc une famille libre de vecteurs de E, et son cardinal est égal à la dimension de E : c'est donc une base de E.

Exercice 3. : edhec 2008

1. (a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} + n.$$

f_n' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$f_n''(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2 + 2e^x \times e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x}{(1+e^x)^3} \times [-(1+e^x) + 2e^x] = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

(b) f_n'' est du même signe que $e^x - 1$, soit négative avant 0 et positive après. Cela donne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$\searrow$	$n - \frac{1}{4}$	$\nearrow$	
$f_n'(x)$		$+$		$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

En effet :

$$f_n'(0) = \frac{-e^0}{(1+e^0)^2} + n = n - \frac{1}{4} > 0 \quad \text{car} \quad n \geqslant 1$$

f_n' est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$ et f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a)

$$\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} nx = -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} nx = +\infty$.

(b)
$$\frac{f_n(x)}{x} = \frac{1}{x+xe^x} + n \xrightarrow[x\to-\infty]{} = n \quad \text{et} \quad \frac{f_n(x)}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} = n$$
car $xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ par croissances comparées donc $x + xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$,

et $x + xe^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ par somme de limites.

Enfin $f_n(x) - nx = \dfrac{1}{1+e^x}$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) - nx = 0$$
et
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to-\infty} f_n(x) - nx = 1.$$
La droite $y = nx$ est donc asymptote à C_n en $+\infty$ et la droite $y = nx + 1$ est asymptote à C_n en $-\infty$.

(c) f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et f_n'' s'annule et change de signe en un unique point : 0 (son signe a été étudiée plus tôt).

D'où C_n admet un unique point d'inflexion $A_n(0; f_n(0)) = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

(d) A_1 est le point de coordonnées $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ et on a :
$$f_1(0) = \frac{1}{2} \quad , \quad f_1'(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
donc T_1 admet pour équation :
$$y = \frac{3}{4}(x-0) + \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

3. (a) f_n est continue car dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[=]-\infty; +\infty[$.

Comme $0 \in]-\infty; +\infty[$, 0 a donc un unique antécédent par f_n, et l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

(b) On calcule
$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} + n \times \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = \frac{1-\left(1+e^{-\frac{1}{n}}\right)}{1+e^{-\frac{1}{n}}} = \frac{-e^{-\frac{1}{n}}}{1+e^{-\frac{1}{n}}} < 0$$
et
$$f_n(0) = \frac{1}{2} > 0.$$
donc par stricte croissance de f_n on obtient :
$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0) \Longleftrightarrow -\frac{1}{n} < u_n < 0.$$

(c) $\lim -\dfrac{1}{n} = \lim 0 = 0$. Par théorème de comparaison, on obtient :
$$\lim u_n = 0.$$

Exercice 4. : **ecricome 2015**

I - Une première expérience aléatoire.

1. On demande ici de simuler, à l'intérieur de la boucle réalisant 10 000 simulations, une expérience.

   La ligne M=N doit permettre de comprendre que M représente le nombre de boules dans l'urne. A chaque passage dans la boucle, on tire une boule donc on enlève une boule, il faut donc faire M= M-1.

   Ensuite on remplit la ligne while ..... : il faut simuler la condition qui fait continuer les tirages, donc le fait de tirer une boule blanche, de probabilité $\dfrac{M-1}{M}$. Pour cela on effectue un tirage aléatoire avec M résultats équiprobables, puis choisir toutes les valeurs sauf une, par exemple : floor(M*rand())<>0 :

```
N=input('Donner un entier naturel non nul')
S=zeros(1,N)
for k=1:1000 do
   i=1
   M=N
   while floor(M*rand())<>0 do
      i=i+1
      M=M-1
   end
   S(i)=S(i)+1
end
disp(S/10000)
bar(S/10000)
```

   Il y a bien sûr d'autres manière de traiter la condition, en remplaçant notamment floor(M*rand()) par une simulation grand(1,1,'uni',1,M).

2. On peut conjecturer que la variable X suit une loi uniforme (toutes les fréquence de la loi empirique, qui approximent les probabilités de la loi de X, semblent être égales).

3. On remarque facilement que :

$$(X=1)=N_1 \quad , \quad (X=2)=B_1\cap N_2 \quad , \quad (X=3)=B_1\cap B_2\cap N_3$$

   et comme les tirages ne sont pas indépendants, par probabilités composées :

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{N} \quad , \quad \mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}_{B_1}(N_2)=\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{N-1}=\frac{1}{N} \quad \text{et}$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}_{B_1}(B_2)\,\mathrm{P}_{B_1\cap B_2}(N_3)=\frac{N-1}{N}\times\frac{N-2}{N-1}\times\frac{1}{N-2}=\frac{1}{N}.$$

4. La boule noire peut sortir à l'un quelconque des N tirages, donc

$$X(\Omega)=[\![1;N]\!].$$

   On généralise les calculs précédents : pour tout $k\geqslant 4$,

$$(X=k)=B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k$$

   et par probabilités composées,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=k)&=\frac{N-1}{N}\times\frac{N-2}{N-1}\times\ldots\frac{N-(k-2)-1}{N-(k-2)}\times\frac{1}{N-(k-1)}\\&=\frac{(N-1)(N-2)\times\cdots\times(N-k+1)\times 1}{N(N-1)\times\cdots\times(N-k+2)\times(N-k+1)}=\frac{1}{N}.\end{aligned}$$

   Finalement avec les probabilités déjà trouvées, X suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$, ce qui confirme la conjecture précédente.

5. Ce nombre moyen est l'espérance de X : puisque c'est une loi uniforme, on obtient :

$$E(X)=\frac{n+1}{2}.$$

II - Une deuxième expérience aléatoire.

1. Sachant qu'on tire sans l'urne 1, on reconnaîtra l'urne lorsqu'on tirera la boule noire. On en déduit que :
$$\mathrm{P}_{C_1}(Y=j)=\mathrm{P}_{C_1}(X=j)=\frac{1}{N}$$
car sachant C_1, on tire dans l'urne 1, comme dans la partie I.

2. Sachant C_2, on tirera uniquement des boules blanches. Or, dans C_2, on peut tirer jusqu'à $N-1$ boules blanches : c'est donc en tirant la N-ième boule blanche qu'on saura qu'on tire dans l'urne 2. On en déduit que la loi de Y sachant C_2 est certaine égale à N, donc :
$$\mathrm{P}_{C_2}(Y=N)=1 \quad \text{et} \quad \forall j\in[\![1;N-1]\!], \mathrm{P}_{C_2}(Y=j)=0.$$

3. D'après les probabilités totales avec le système complet d'évènements (C_1,C_2) on a :
$$(Y=j)=[C_1\cap(Y=j)]\cup[C_2\cap(Y=j)]$$
donc par incompatibilité de la réunion et probabilités composées et avec la question précédente :
$$\forall j\in[\![1;N-1]\!],\ \ \mathrm{P}(Y=j)=\mathrm{P}(C_1)\,\mathrm{P}_{C_1}(Y=j)+\mathrm{P}(C_2)\,\mathrm{P}_{C_2}(Y=j)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{N}+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{2N}.$$
De même, pour $j=N$:
$$\mathrm{P}(Y=N)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{N}+\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}.$$

4. E est finie donc admet une espérance, qui vaut :
$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{j=1}^{N} j\,\mathrm{P}(Y=j)=\sum_{j=1}^{N-1} j\times\frac{1}{2N}+N\left(\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N-1} j+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\\ &= \frac{1}{2N}\times\frac{(N-1)N}{2}+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}=\frac{N-1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2N}{4}=\frac{3N+1}{4}.\end{aligned}$$

III - Une troisième expérience aléatoire.

1. Il faut au moins deux tirages pour obtenir une boule noire et une boule blanche. D'autre part comme les tirages sont avec remise, ils sont illimités et à chaque tirage on peut tirer une boule blanche ou une boule noire : on peut donc obtenir n'importe quel nombre de boules de la même couleur avant d'obtenir l'autre, ce qui donne
$$T(\Omega)=[\![2;+\infty[\![.$$

2. Selon la boule tirée au départ, pour avoir $(T=k)$, il faut tirer la même couleur pendant $k-1$ tirages et l'autre couleur au tirage k, donc
$$(T=k)=[B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k]\cup[N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k]$$
Par incompatibilité de la réunion et indépendance des tirages (ils sont cette fois sans remise), on en déduit que :
$$\mathrm{P}(T=k)=\frac{N-1}{N}\times\cdots\times\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\times\cdots\times\frac{1}{N}\times\frac{N-1}{N}=\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N}+\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}.$$

3. On considère la série :
$$\sum_{k=2}^{+\infty} k\,\mathrm{P}(T=k)=\sum_{k=2}^{+\infty} k\left[\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N}+\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}\right]$$
On reconnait deux séries géométriques dérivées absolument convergentes, car $\left|\frac{N-1}{N}\right|<1$ et $\left|\frac{1}{N}\right|<1$. T admet donc une espérance et on a :
$$E(T) = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}-1\right)+\frac{N-1}{N}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}-1\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{N-1}{N}\right)^2}-1\right)+\frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^2}-1\right)=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{N}\right)^2}-1\right)+\frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{\left(\frac{N-1}{N}\right)^2}-1\right)\\
&= \frac{1}{N}\left(N^2-1\right)+\frac{N-1}{N}\left(\frac{N^2}{(N-1)^2}-1\right)=N-\frac{1}{N}+\frac{N}{N-1}-\frac{N-1}{N}=N-\frac{N}{N-1}-\frac{N}{N}\\
&= \frac{N(N-1)-N-(N-1)}{N-1}=\frac{N^2-3N+1}{N-1}.
\end{aligned}$$

4. (a) $(U=1)\cap(T=2)$ signifie qu'on a fait deux tirages pour obtenir au moins une boule blanche et une noire, et qu'on a obtenu exactement une boule blanche. Il y a donc eu une boule noire, et

$$(U=1)\cap(T=2)=[B_1\cap N_2]\cup[N_1\cap B_2]$$

Par incompatibilité de la réunion et indépendance des tirages,

$$\mathrm{P}[(U=1)\cap(T=2)]=\frac{N-1}{N}\times\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\frac{N-1}{N}=\frac{2(N-1)}{N^2}.$$

(b) Pour $k\geqslant 3$, $(U=1)\cap(T=k)$ signifie qu'on a obtenu les deux couleurs pour la première fois au k-e tirage, avec $k-1$ boules de la premières couleur ($k-1\geqslant 2$) et une de l'autre. Comme on a obtenu exactement une boule blanche, on a forcément obtenu $k-1$ boules noires et elles doivent avoir été obtenues avant donc :

$$(U=1)\cap(T=k)=N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k$$

et par indépendance des tirages,

$$\mathrm{P}[(U=1)\cap(T=k)]=\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}.$$

5. (a) $(U=j)\cap(T=j+1)$ signifie qu'on a obtenu pour la première fois les 2 couleurs après $j+1$ tirages dont j ont donné une boule blanche. On a donc obtgenu 1 boule noire, et comme $j\geqslant 2$, les boules blanches arrivent avant donc

$$(U=j)\cap(T=j+1)=B_1\cap\cdots\cap B_j\cap N_{j+1}$$

et par indépendance des tirages,

$$\mathrm{P}[(U=j)\cap(T=j+1)]=\left(\frac{N-1}{N}\right)^{j}\frac{1}{N}.$$

(b) Si $k\neq j+1$, $(U=j)\cap(T=k)$ signifie qu'on a obtenu pour la première fois les deux couleurs avec j boules blanches, donc $k-j$ boules noires. Or $k-j\neq 1$, donc aucune des deux boules n'est obtenu une fois : c'est impossible puisque la 2e couleur obtenue réalise l'évènement dès son arrivée, donc on obtient obligatoirement une seule boule de cette couleur. On en déduit que :

$$\forall k\neq j+1,\ \mathrm{P}[(U=j)\cap(T=k)]=0.$$

6. D'après les probabilités totales avec le système complet d'évènements $(T=k)_{k\geqslant 2}$, on a

$$(U=1)=\bigcup_{k=2}^{+\infty}[(U=1)\cap(T=k)]$$

Par incompatibilité de la réunion et avec la question 4, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(U=1) &= \frac{2(N-1)}{N^2}+\sum_{k=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}=\frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{N-1}{N}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{N}\right)^{n}\\
&= \frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{N}}-1-\frac{1}{N}\right)=\frac{2(N-1)}{N^2}+\frac{N-1}{N}\left(\frac{N}{N-1}-1-\frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{2(N-1)}{N^2} + 1 - \frac{N-1}{N} - \frac{N-1}{N^2} = \frac{N-1}{N^2} + \frac{N-N+1}{N} = \frac{N-1+N}{N^2} = \frac{2N-1}{N^2}.$$

Enfin l'obtention des deux couleurs nécessite au minimum une boule blanche, et peut être obtenu avec autant de boules blanches qu'on veut suivies d'une boule noire, donc

$$U(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

On vient de voir que $\mathrm{P}(U=1) = \dfrac{2N-1}{N^2}$, et enfin pour $j \geqslant 2$, on a vu que $(U=j)$ n'est possible que si, en même temps, $T = j+1$ donc on obtient :

$$(U=j) = [(U=j) \cap (T=j+1)] \quad \text{donc} \quad \mathrm{P}(U=j) = \mathrm{P}[(U=j) \cap (T=j+1)] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^j \frac{1}{N}.$$