Correction du devoir maison n° 3

Exercice 1. : **Ecricome 2003**
1. Étude des fonctions ch, sh, **et** f.

1. ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\,\mathrm{sh}(x)$$

donc ch est paire et sh est impaire.

2. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}'(x) = \frac{e^{x}-(-e^{-x})}{2} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x) > 0$$

car $e^{x} > 0$ et $e^{-x} > 0$. On obtient donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh'(x)$		$+$		$+$	
$sh(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$sh(x)$		$-$	0	$+$	

En effet

$$\mathrm{sh}(0) = \frac{e^{0}-e^{0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc par somme

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$$

et par imparité de sh,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty.$$

3. On factorise les sommes par leur termes prépondérants :

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^{x}(1-e^{-2x})}{2}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-2x}) = 1$ donc

$$\mathrm{sh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{x}}{2}$$

Enfin on en déduit (par croissances comparées pour la seconde limite) que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{2x} = +\infty$$

donc la courbe de sh admet une branche parabolique verticale au voisinage de $+\infty$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) > 0$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et continue par continuité de l'exponentielle.
Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x); \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x)\right[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$.

5. ch est comme somme et composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x).$$

dont on a déterminé le signe précédemment. Cela donne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En effet

$$\mathrm{ch}(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1,$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$$

et par parité de ch

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty.$$

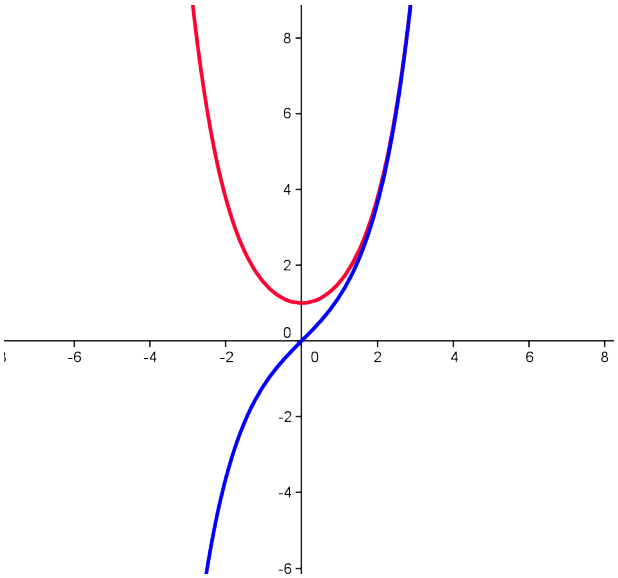
6. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$$

donc on en déduit que

$$\mathrm{ch}(x) > \mathrm{sh}(x)$$

7.



8. f est défini sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0. De plus pour tout $x \neq 0$,

$$f(-x) = \frac{-x}{\mathrm{sh}(-x)} = \frac{-x}{-\mathrm{sh}(x)} = \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} = f(x)$$

et

$$f(-0) = f(0)$$

La fonction f est donc paire.

9. On écrit les développements limités à l'ordre 2 en 0 de e^x et e^{-x} :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

puis en remplaçant x par $-x$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

On soustrait :

$$e^x - e^{-x} = 2x + o\left(x^2\right)$$

et enfin :

$$\mathrm{sh}(x) = x + o\left(x^2\right).$$

10. On en déduit que pour tout $x \neq 0$ et au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{x}{x + o(x^2)} = \frac{x}{x\left(1 + o(x)\right)} = \frac{1}{1 + o(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{1} = 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0.

D'autre part, toujours pour $x \neq 0$ et au voisinage de 0,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{1+o(x)} - 1}{x} = \frac{-o(x)}{x(1 + o(x))} = \frac{-o(1)}{1 + o(x)} \underset{x \to 0}{\to} 0$$

donc f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = 0.$$

11. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonctions dérivables, avec $\mathrm{sh}(x) \neq 0$ sur ces intervalles. De plus $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{1 \times \mathrm{sh}(x) - x \times \mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2} = \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2}.$$

12. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h'(x) = \mathrm{sh}'(x) - \mathrm{ch}(x) - x\,\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{ch}(x) - \mathrm{ch}(x) - x\,\mathrm{sh}(x) = -x\,\mathrm{sh}(x)$$

donc

$$h'(x) < 0 \quad \text{sur }]0; +\infty[\quad \text{et} \quad h'(0) = 0.$$

Enfin $h(0) = 0$ et h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $h(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$
$h(x)$	0	$-$	

13. Comme $(\mathrm{sh}(x))^2 > 0$ et $h(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$, on a $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$ et $f'(0) = 0$. Cela donne :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

car $f(0) = 1$ et

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\frac{e^x}{2}} \sim \frac{2x}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

par croissances comparées.

On construit donc une courbe décroissante sur $\mathbb{R}^+$, partant de 1 en 0 avec une tangente horizontale et arrivant sur une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$.

La courbe sur $\mathbb{R}^-$ est obtenue par symétrie par rapport à l'axe (Oy) car f est paire.

2. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. f est strictement décroissante et continue sur $[0,8;1]$ donc par le théorème de bijection monotone,

$$f([0,8;1]) = [f(1); f(0,8)] \subset [0,8;1]$$

car $f(1) > 0,8$ et $f(0,8) < 1$.

Montrons alors par récurrence sur $n \geqslant 0$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,8;1]$:

Initialisation : Pour $n = 0$, on a

$$u_0 = 1 \in [0,8;1]$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n \in [0,8;1]$, alors

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f([0,8;1]) \subset [0,8;1] \quad \text{donc} \quad u_{n+1} \in [0,8;1]$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in [0,8;1].$$

2. Tout d'abord on a

$$f(0) = 1 \neq 0$$

donc 0 n'est pas solution.

Pour $x \neq 0$ on résout :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} = x \iff \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = 1 \iff \mathrm{sh}(x) = 1.$$

Or par 1.4 la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $1 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $\mathrm{sh}(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, et l'équation $f(x) = x$ admet α pour unique solution.

3. La fonction sh est strictement croissante ; les valeurs données par l'énoncé permettent d'écrire :

$$\mathrm{sh}(0,8) < 1 = \mathrm{sh}(\alpha) < \mathrm{sh}(1) \quad \text{donc} \quad 0,8 < \alpha < 1.$$

De plus pour tout $x \in [0,8;1]$,

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(\mathrm{sh}(x))^2}.$$

Par décroissance de h, pour $x \in [0,8;1]$ on a

$$h(1) \leqslant h(x) \leqslant h(0,8) \quad \text{donc} \quad -h(0,8) \leqslant -h(x) \leqslant -h(1)$$

et par croissance de sh on a

$$0 < \mathrm{sh}(0,8) \leqslant \mathrm{sh}(x) \leqslant \mathrm{sh}(1)$$

qui donne avec la croissance de la fonction carré et la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^+$:

$$0 < (\mathrm{sh}(0,8))^2 \leqslant (\mathrm{sh}(x))^2 \leqslant (\mathrm{sh}(1))^2 \quad \text{puis} \quad \frac{1}{\mathrm{sh}^2(1)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{sh}^2(0,8)}.$$

On multiplie alors les 2 inégalités qui ne concernent que des nombres positifs :

$$\frac{-h(0,8)}{\mathrm{sh}^2(1)} \leqslant -f'(x) \leqslant \frac{-h(1)}{\mathrm{sh}^2(0,8)},$$

et enfin en multipliant par $-1 > 0$:

$$\frac{h(1)}{\mathrm{sh}^2(0,8)} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{h(0,8)}{\mathrm{sh}^2(1)}.$$

4. f est dérivable sur $[0,8;1]$ et pour tout $x \in [0,8;1]$,

$$-0,5 < -0,47 \leqslant f'(x) \leqslant -0,13 < 0,5 \quad \text{donc} \quad |f'(x)| < 0,5.$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors : pour tous x et y de $[0,8;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 0,5 \times |x - y|.$$

On applique cette inégalité à $x = u_n \in [0,8;1]$ et $y = \alpha \in [0,8;1]$ et on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant 0,5 \times |u_n - \alpha|$$

et encore :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,5 \times |u_n - \alpha|.$$

Montrons ensuite par récurrence que $n \geqslant 0$ que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant 0.2\,(0.5)^n$.

Initialisation : pour $n = 0$,

$$0,8 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant 1 - \alpha \leqslant 0,2 \quad \text{donc} \quad |1 - \alpha| \leqslant 0,2$$

et $0,2 \times (0,5)^0 = 0,2$ donc

$$|u_0 - \alpha| \leqslant 0,2 \times (0,5)^0$$

et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 0,2 \times 0,5^n$. Alors

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,5 \times |u_n - \alpha| \leqslant 0,5 \times 0,2 \times 0,5^n = 0,2 \times 0,5^{n+1}.$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leqslant 0.2 \times (0,5)^n.$$

5. $|0,5| < 1$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} 0,2 \times (0,5)^n = 0.$$

Par encadrement (une valeur absolue est toujours positive) on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n - \alpha = 0 \quad \text{et enfin} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.$$

6. *On admet :* $2\frac{log(5)}{log(2)} \in]4,5[$.

D'après l'inégalité de la question précédente, il suffit que l'on ait : $0,2 \times (0,5)^n \leqslant 0,001$ pour que l'on ait : $|u_n - \alpha| \leqslant 0,001$ par majoration.
On résout donc :

$$0,2 \times (0,5)^n \leqslant 0,001 \Leftrightarrow (0,5)^n = e^{n \ln(0,5)} \leqslant \frac{0,001}{0,2} = \frac{1}{200}$$

$$\Leftrightarrow \text{ (en compasant par ln croissante) } n \ln(\frac{1}{2}) \leqslant \ln(\frac{1}{200}) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(\frac{1}{200})}{\ln(\frac{1}{2})} \text{ (car } \ln(1/2) < 0)$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{-\ln(200)}{-\ln(2)} = \frac{\ln(200)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^3 \times 5^2)}{\ln(2)} = \frac{3\ln(2) + 2\ln(5)}{\ln(2)} = 3 + 2\frac{\ln(5)}{\ln(2)}.$$

Ainsi, comme $2\frac{log(5)}{log(2)} \in]4,5[$, les entiers n supérieurs à $3 + 2\frac{\ln(5)}{\ln(2)}$, sont les entiers supérieurs à $N = 8$.

7. **Informatique :**

   (a)
```
function y=f(x)
    if x==0 then
        y=1
    else
        y=x/((exp(x)-exp(-x))/2)
    end
endfunction
```

   (b)
```
N=8
U=1
for k=1:N do
    U=f(U)
end
disp(U, 'U=')
```

   (c) On sait d'après la question 6. que $|u_N - \alpha| \leqslant 0,001$ i.e. $u_N - 0,001 \leqslant \alpha \leqslant u_N + 0,001 \Leftrightarrow 0,8803753 \leqslant \alpha \leqslant 0,8823753$

Exercice 2. : **ecricome 2011**

1. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Pour vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A, on liste les critères :

   - Δ est une matrice diagonale donc diagonalisable ; en effet $\Delta = I\Delta I = I\Delta I^{-1}$ (l'inverse de l'indentité est l'indentité car $I \times I = I$).
   - $N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ et $N^2 = 0$ donc N est nilpotente.
   - $\Delta N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\Delta N = N\Delta$.
   - $N + \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

   Donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

   Dans toute la suite de l'exercice, on pose :
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) $(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. puis ;
   $(A - I)^2(A - 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Ainsi,
$$(A - I)^2(A - 2I) = 0$$

   (b) La question précédente nous donne que le polynôme $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)$ est annulateur de A donc les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 2.

   De plus, $A - 1I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a une ligne nulle donc n'est pas inversible donc 1 est

bien valeur propre de A.
De même, $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a deux colonnes égales donc n'est pas inversible donc 2 est bien valeur propre de A.

(c) On développe l'égalité $(A-I)^2(A-2I) = 0$, en sachant que $(A-I)^2 = A^2 - 2A + I$ par formule du binôme car A et I commutent ; on obtient $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0$; puis on isole l'identité : $\frac{1}{2}(A^3 - 4A^2 + 5A) = I$ et on factorise par A : $A\frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)A = I$ donc A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ n'est pas inversible avec les pivots suivants :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \quad , \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + (3-\lambda)L_1$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda(3-\lambda) & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

On obtient une réduite triangulaire qui n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul ce qui donne :

$$1 - \lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } 2 - \lambda(3-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

qui a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$ donc admet deux solutions :

$$\lambda_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

En rassemblant toutes les solutions, on obtient $\mathrm{Sp}(A) = \{1; 2\}$.

4. On considère les matrices colonnes :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) On sait que $dim\,(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3 \times 1 = 3$. (X_1, X_2, X_3) est une famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc il suffit de montrer qu'elle est libre pour que ce soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
On résout l'équation suivante d'inconnues $(x, y, z) \in_R^3$:

$$xX_1 + yX_2 + zX_3 = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + z = 0 \\ -x - 2z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3z = 0 \\ x = -2z \\ y = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = y = z = 0$$

Cette famille est bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b)

$$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2X_1$$

$$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X_2$$

$$\Delta X_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = X_3.$$

(c) En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, P est constituée d'une base de vecteurs propres de Δ respectivement associés aux valeurs propres 2, 1 et 1 donc $\Delta = PDP^{-1}$.

(d) Pour isoler D, on multiplie l'égalité ci-dessus par P^{-1} à gauche puis par P à droite : $P^{-1}\delta = P^{-1}PDP^{-1} = IDP^{-1} = DP^{-1}$ donc $P^{-1}\Delta P = DP^{-1}P = DI = D$.

(e) En appliquant la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -L_3 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, et on vérifie au brouillon que $PP^{-1} = I$ (ou bien $P^{-1}P = I$).

(f) **Informatique :**

i. Si une matrice M est bien diagonalisable alors l'instruction `[P,D]=spec(A)` diagonalisable la matrice M c'est-à-dire qu'elle calcule une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.

ii. On remarque que la première colonne obtenue $\begin{pmatrix} 0,7071068 \\ -0,7071068 \\ 0 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur X_1 donc il appartient bien à $E_2(\Delta) = Vect(X_1)$ i.e. c'est bien un vecteur propre de Δ associé à la valeur propre 2.
De même, la deuxième colonne est bien colinéaire à X_3 donc c'est bien un vecteur propre de Δ associé à la valeur propre 2, de même que la dernière colonne qui est égale à X_2.

On a bien 3 vecteurs propres de Δ qui sont linéairement indépendants car (X_1, X_2, X_3) l'étaient donc on a bien une base de vecteurs propres de Δ.

5. (a)

$$N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{et} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc N est une matrice nilpotente.

(b)
- Δ est diagonalisable
- N est nilpotente
- $\Delta N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$
  et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$ donc $\Delta N = N\Delta$.
- $\Delta + N = A$.

donc (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.

(c) Comme Δ et N commutent , on peut appliquer la formule du binôme pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$A^n = (N+\Delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}$$

Ensuite pour $n = 1$ on a $A^1 = A = \Delta + N$ donc la formule est vraie pour $n = 1$.

Enfin pour $n = 0$ on a $A^0 = I$ et $\Delta^0 + 0N\Delta^{0-1} = I$ donc la formule reste vraie (avec Δ^{-1} qui existe puisque Δ est semblable à une matrice diagonale inversible, car D n'a pas de 0 sur la diagonale).

(d) Prouvons par récurrence sur k que pour tout $k \geqslant 1$, $\Delta^k N = N$.

Initialisation : Pour $k = 1$ on a $\Delta N = N$ (vu à la question 4)b)).

Hérédité : Soit $k \geqslant 1$ tel que $\Delta^k N = N$ alors $\Delta^{k+1} N = \Delta(\Delta^k N) = \Delta N = N$.

Conclusion : Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $\quad \Delta^k N = N$ (vrai aussi pour $k = 0$ car $\Delta^0 = I$).

(e) On a pour $n - 1 \geqslant 0$ donc pour $n \geqslant 1$: $\Delta^{n-1} N = N = N\Delta^{n-1}$ puisqu'elles commutent donc

$$A^n = \Delta^n + nN$$

avec :

- Δ^n diagonalisable car $\Delta^n = PD^nP^{-1}$, où P est inversible et D^n est diagonale.
- nN nilpotente puisque $(nN)^2 = n^2N^2 = 0$ et $nN \neq 0$.
- Δ^n et nN commutent puisque Δ et N commutent.

D'où (Δ^n, nN) sera une décomposition de Dunford de A^n pour $n \geqslant 1$.

Enfin $(\Delta^0, 0N) = (I, 0)$ l'est aussi pour $A^0 = I$ (trivial).

Exercice 3. : **edhec 2010**

1. $u_0 = 1 + \frac{1}{2^0} = 2$ et $u_1 = \left(1 + \frac{1}{2^0}\right)\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3$ et $u_2 = \left(1 + \frac{1}{2^0}\right)\left(1 + \frac{1}{2^1}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = 3 \times \frac{5}{4}$.

2. (a) On a $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n + \dfrac{1}{2^{n+1}} u_n \geqslant u_n$ car $u_n \geqslant 0$ donc la suite est croissante et comme $u_0 = 2$, $u_n \geqslant 2$ pour tout n.

   (b) $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ et la suite est croissante.

   (c) Soit $g(x) = \ln(1 + x) - x$.
   g est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$g(x)$	‖	↗	0	↘	‖

Donc $g(x) \leqslant 0$ et pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1 + x) \leqslant x$.

On pouvait aussi utiliser la concavité de $x \to \ln(1 + x)$ dont la courbe est donc en dessous de sa tangente en 0 d'équation $y = x$.

(d) Comme produit de termes strictement positifs, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

Et comme $1+\frac{1}{2^k} > 1$ alors $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$ et :

$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant 2.$

Donc $\ln(u_n) \leqslant 2$ pour tout entier n.

3. On a donc $u_n \leqslant e^2$ et comme la suite est croissante et majorée par e^2 (et minorée par 2), elle converge vers une limite $\ell \in \left[2, e^2\right]$.

4. (a)
```
U=zeros(1,100)
U(1)= 3
puissances=1/2
for k=1:99 do
    puissances=puissances*1/2
    U(k+1)= U(k)*(1+puissances)
end
plot(U,'+')
```

(b) La suite (u_n) est bien croissante et majorée. Elle converge bien vers $l \simeq 4,8 \in [2, e^2]$.

5. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

(a) Comme $\ell > 0$ alors ln est continue en ℓ donc $\ln(u_n) \to \ln(\ell)$

Or $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ donc $\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell)$.

ce qui signifie que la série $\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ converge et que $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

(b) Comme u_n et ℓ sont strictement positifs,

$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \ln(\ell) - \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right).$

(c) Et comme $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1\frac{1}{2}}$.

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

(d) On a vu que la suite u était croissante donc $\ell - u \geqslant 0$ et de l'autre coté,
$\ell - u_n - \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right) = -u_n + \ell \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}$.

et de $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$ on tire $\frac{\ell}{u_n} \leqslant e^{1/2^n}$ soit $\ell - u_n e^{1/2^n} \leqslant 0$ donc $\left(-u_n + \ell \mathrm{e}^{-1/2^n}\right) e^{1/2^n} \leqslant 0$.

Finalement $\ell - u_n - \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-1/2^n}\right) \leqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-1/2^n}\right)$.

(e) $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x} - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^{-x} - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$g(x)$	‖	↗	0	↘	‖

Donc $g(x) \leqslant x$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $1 - e^{-x} \leqslant x$. On obtient $1 - \mathrm{e}^{-1/2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et finalement pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$.

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ est convergente, alors par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $(\ell - u_n)$ est également convergente.