Correction du devoir surveillé n° 2

Exercice 1. : **EML 2016**

Partie I : Étude de la matrice A

1. On calcule sans difficulté :
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On résout l'équation :
$$aI + bA + cA^2 = 0 \iff \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = 0 \iff a = b = c = 0$$
donc (I, A, A^2) est libre.

3. $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2A.$

4. On veut les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
D'après la question 3., on sait que le polynôme $X^3 - 2X = X(X^2-2)$ est un polynôme annulateur de A donc les seules valeurs propres possibles de A sont 0, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$; et donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

   Puisqu'on doit calculer les sous-espaces propres, vérifions qu'elles sont bien valeurs propres en calculant les sous-espaces propres associés :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff AX = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rl} x \quad + z &= 0 \\ y \quad &= 0 \\ 0 &= 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = -z \\ y = 0 \\ z = z \end{array} \right. \iff X = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   donc $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$. 0 est bien valeur propre de A car il y a au moins un vecteur non nul dans le sous-espace propre associé.

   De même

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\sqrt{2}}(A) \iff (A+\sqrt{2}I)X = 0 \iff \text{(après pivot)} \left\{ \begin{array}{r} x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = z \\ y = -\sqrt{2}z \\ z = z \end{array} \right. \iff X =$$

   donc $E_{-\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$. Enfin

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(A) \iff (A-\sqrt{2}I)X = 0 \iff \text{(après pivot)} \left\{ \begin{array}{r} x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = z \\ y = \sqrt{2}z \\ z = z \end{array} \right. \iff X = z \Big($$

   donc $E_{\sqrt{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Enfin la famille $\left[\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right]$ est une base de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $-\sqrt{2}, 0$ et $\sqrt{2}$ donc en posant

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

P est inversible et la formule de changement de base assure que $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Étude d'une application définie sur $\mathcal{E}$

5. On remarque que
$$\mathcal{E} = \left\{aI + bA + cA^2, (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$$
donc $\mathcal{E}$ est bien un sous-espaces vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, engendré par (I, A, A^2) qui est également libre (question 2) donc c'est une base de $\mathcal{E}$, et $\dim(\mathcal{E}) = 3$.

6. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{E}$, on la note $M = aI + bA + cA^2$, on a alors avec la question 4 :
$$AM = aA + bA^2 + cA^3 = (a+2c)A + bA^2 \in \mathrm{Vect}(A, A^2) \subset \mathcal{E}$$
donc AM est bien élément de $\mathcal{E}$.

7. On vient de voir que pour tout M de $\mathcal{E}$, $f(M) \in \mathcal{E}$ donc f est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. Vérifions qu'elle est linéaire : pour tous $M_1, M_2 \in \mathcal{E}$ et tout λ réel on a :
$$f(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda f(M_1) + f(M_2)$$
donc f est linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, c'est bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

8. On calcule sans difficulté $f(I) = A$, $f(A) = A^2$ et $f(A^2) = A^3 = 2A$ (question 4) donc :
$$F = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

9. On peut calculer F^3 et vérifier que $F^3 = 2F$ puis revenir à l'endomorphisme f. Mais on peut aussi calculer directement et sans difficulté : pour tout $M \in \mathcal{E}$,
$$f \circ f \circ f(M) = f \circ f(AM) = f(A^2M) = A^3M = 2AM = 2f(M)$$

10.
$$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker(F) \iff FX = 0 \iff \begin{matrix}x + 2z = 0\\y = 0\end{matrix} \iff X = z\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$
donc $\ker(F) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right]$ et $\ker(f) = \mathrm{Vect}(A^2 - 2I)$.
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(I), f(A), f(A^2)) = \mathrm{Vect}(A, A^2, 2A) = \mathrm{Vect}(A, A^2)$$
et la famille (A, A^2) est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$.

11. (a) On peut résoudre cette équation en passant par les matrices associées dans la base (I, A, A^2) : on cherche $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tel que :
$$FX = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}0\\x+2z\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

qui est absurde d'après le premier coefficient des deux vecteurs, donc l'équation $f(M) = I + A^2$ n'a pas de solution dans $\mathcal{E}$.

On peut aussi travailler directement sur f en remarquant que $I + A^2 \notin \mathrm{Vect}(A, A^2) = \mathrm{Im}\, f$ donc l'équation n'a pas de solution.

(b) On résout de même l'équation, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$FX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ x+2z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{c} x = 1-2z \\ y = 1 \end{array} \right. \iff X = \begin{pmatrix} 1-2z \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$$

donc les matrices N de $\mathcal{E}$ vérifiant $f(N) = A + A^2$ sont toutes les matrices de la forme :

$$N = (1-2z)I + A + zA^2 = \begin{pmatrix} 1-z & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ z & 1 & 1-z \end{pmatrix}$$

avec $z \in \mathbf{R}$.

On peut aussi résoudre directement avec f en remarquant que $A = f(I)$ et $A^2 = f(A)$ pour écrire :

$$f(N) = A+A^2 \iff f(N) = f(I)+f(A) \iff f(N-I-A) = 0 \iff N-I-A \in \mathrm{Ker}\, f \iff N-I-A = \lambda(A^2-2I)$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}$, et enfin les solutions sont toutes les matrices de la forme :

$$N = I + A + \lambda(A^2 - 2I) = (1-2\lambda)I + A + \lambda A^2$$

qui est bien la même que celle trouvée par le calcul matriciel.

Exercice 2. : **EDHEC 1998**
On considère le fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+$ et $f'(x) = e^{-x} > 0$. .
De plus, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ par composée et somme de limites donc :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

(b) On étudie les variations de la différence : soit $g(x) = x - f(x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}_+$ et $g'(x) = 1 - e^{-x} = f(x)$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

et on a donc par stricte croissance de g $g(x) > g(0) = 0$ sur $]0, +\infty[$ et $g(0) = 0$ donc $\forall x > 0$: $f(x) < x$ et $f(x) = x \iff x = 0$

2. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

(a)
```
u0=1
U=zeros(1,100)
U(1)=f(u0)
for k=1:99 do
    U(k+1)=f(U(k))
end

N=1:100
plot(N,U,'+')
```
La suite (u_n) semble décroissante et semble converger vers 0.

(b) on procède par récurrence

- pour $n = 0$ on a $u_0 = 1 \in]0, 1]$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]0, 1]$ alors $0 < u_n \leq 1$ et comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ alors $f(0) < f(u_n) \leq f(1)$ i.e. $0 < f(u_n) \leq 1 - e^{-1} \leq 1$d'où $u_{n+1} \in]0, 1]$.

  ou autrement dit : f est strictement croissante sur $]0; 1]$ donc $f(]0, 1]) =]f(0), f(1)] =]0, 1 - e^{-1}] \subset]0; 1]$ donc $]0; 1]$ est un intervalle stable par f donc comme $u_n \in]0; 1]$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in]0; 1]$.

- Donc par récurence : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in]0, 1]$

(c) Comme pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \leq x$ alors comme $u_n \geq 0$ alors $f(u_n) \leq u_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n - u_{n+1} \geqslant 0$

(d) La suite u est donc décroissante et minorée par 0 ($u_n > 0$)donc par thm de la limite monotone elle converge vers une limite **dont on ne sait pas qu'elle est 0,** $\ell \geq 0$ (les inégalité s'élargissent en passant à la limite)

Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\ell \in \mathbb{R}^+$ alors $f(\ell) = \ell$. La seule solution étant $\ell = 0$ d'après la première question.
Finalement $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$

3. (a) On a $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$ par télescopage.

Pour montrer que la série est convergente, il suffit de montrer que la somme partielle a une limite finie :

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = 1 - u_{n+1} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty donc$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = 1}$$

(b) On détermine la limite du quotient par encadrement comme $u_n - u_{n+1} = u_n - f(u_n) = u_n - 1 + e^{-u_n}$.
On pose $x = -u_n \to 0$ d'après la question 2.(c) donc on peut utiliser le développement limité de $\exp$ en 0 :
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $e^{-u_n} = 1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$ d'où :
$u_n - u_{n+1} = u_n - 1 + e^{-u_n} = u_n - 1 + 1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) = \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) \sim \frac{u_n^2}{2}$.

(c) Comme la série $\sum_{n\geq} u_n - u_{n+1}$ et convergente et que $u_n^2 \geq 0$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} \frac{u_n^2}{2}$ est une série convergente donc $\sum_{n\geq 0} u_n^2 = 2\sum_{n\geq 0} \frac{u_n^2}{2}$ est convergente.

(d) la matrice ligne `V` contient les 100 premiers termes de la suite $v_n = 2(u_n - u_{n+1})$ donc `S1 = cumsum(V)` contient les 100 premiers termes de la série de terme général $v_n = 2(u_n - u_{n+1})$, qui converge vers $\sum_{n=0}^{+\infty} 2(u_n - u_{n+1}) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n - u_{n+1}) = 2$ d'après la question 3.(a).
`S2=cumsum(U.^2)` contient les 100 premiers termes de la série de terme général u_n^2.
Le graphique indique que cette série semble bien converger également comme prouvé à la question 3.(b)
En revanche, même si les termes généraux sont équivalents, les séries ne sont pas équivalentes puisqu'elles ne convergent pas vers la même limite (les théorèmes de comparaisons indiquent que si l'une des séries converge, l'autre aussi mais pas qu'elles ont même limite , encore moins qu'elles sont équivalentes).

Exercice 3. : **EDHEC 2009**
Dans cet exercice, on considère la fonction f définie comme suit :

$f(0) = 1$, et pour tout x non nul de $]-\infty; 1[$, $\quad f(x) = \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$.

1. • **Etude sur** $]-\infty; 0[$ **et** $]0; 1[$ **:**
$x \to 1-x$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$, à valeurs dans $]0; +\infty[$ et $\ln$ est continue sur $]0; +\infty[$ donc $x \to \ln(1-x)$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$.

   De plus $x \to 1-x$ est continue et strictement positive sur $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$, et $x \to -x$ est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; 1[$, donc f est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

   • **Etude en** 0 :
   Au voisinage de 0, on a $\ln(1-x) = -x + o(x)$ donc pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)[-x+o(x)]} = \frac{-x}{x(1-x)[-1+o(1)]} = \frac{-1}{(x-1)(1+o(1))} \xrightarrow[x\to 0, x\neq 0]{} \frac{-1}{-1\times 1} = 1 = f(0)$$

   donc f est continue en 0.

   Remarque : on pouvait aussi utiliser un DL d'ordre 2 de $\ln$ ou passer aux équivalents.

   On obtient enfin que f est continue sur $]-\infty; 1[$.

2. (a) Au voisinage de 0 on a :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

   (b) On a alors, toujours au voisinage de 0 et par valeurs différentes :

$$T_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} - 1}{x} = \frac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} = \frac{-x-(1-x)\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x(1-x)[-x+o(x)]}$$

$$T_0(x) = \frac{-x+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^2(1-x)[-1+o(1)]} = \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2(1-x)[-1+o(1)]} = \frac{x^2\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right)}{x^2(1-x)[-1+o(1)]}$$

   dont on prend la limite :

$$T_0(x) = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{(1-x)[-1+o(1)]} \xrightarrow[x\to 0, x\neq 0]{} \frac{-\frac{1}{2}}{1\times(-1)} = \frac{1}{2}$$

   Comme le taux d'accroissement admet une limite non nulle lorsque x tend vers 0 par valeurs différentes, on en déduit que f est dérivable en 0 et que

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} T_0(x) = \frac{1}{2}.$$

3. (a) f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{-1 \times (1-x)\ln(1-x) - (-x) \times \left(-\ln(1-x) + (1-x) \times (-1) \times \frac{1}{1-x}\right)}{[(1-x)\ln(1-x)]^2}$$

qu'on simplifie :

$$f'(x) = \frac{-(1-x)\ln(1-x) + x[-\ln(1-x) - 1]}{[(1-x)\ln(1-x)]^2} = \frac{-\ln(1-x)(1-x+x) - x}{[(1-x)\ln(1-x)]^2}$$

et enfin

$$f'(x) = \frac{-\left[\ln(1-x) + x\right]}{\left[(1-x)\ln(1-x)\right]^2}.$$

(b) On pose $g : x \mapsto \ln(1-x) + x$ sur $]-1;+\infty[$.

g est dérivable sur $]-\infty;1[$ comme somme de fonctions définies (car $1-x>0$) et dérivables sur $]-\infty;1[$.

$$g'(x) = -\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{-1+1-x}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$$

Or $1-x>0$ sur $]-\infty;1[$ donc $g'(x)$ est strictement positive sur $]-\infty;0[$, nulle en 0 et strictement négative sur $[0;+\infty[$.

D'où g est strictement croissante sur $\mathbf{R}^-$ et strictement décroissante sur $[0;1[$ donc admet un maximum strict en 0, égal à $\ln(1)+0=0$.

Enfin on en déduit que $g(x)<0$ sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$, et nulle en 0.

On en déduit que $f'(x)$ est strictement positive sur $]-\infty;0[$ et $]0;1[$ et f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$.

(c) En factorisant $(1-x)$ par son terme prépondérant (d'abord à l'extérieur du $\ln$, puis à l'intérieur si nécessaire (ce qui ne sera pas le cas) on a :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\times\ln(1-x)} = \frac{-x}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

par quotient de limites.

Au voisinage de 1 on pose $X = 1-x$ qui tend vers 0 et on a :

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{X\to0^+} \frac{X-1}{X\ln(X)} = +\infty$$

car $X\ln X \xrightarrow[X\to0^+]{} 0^-$ par croissance comparée et $X-1 \xrightarrow[X\to0^+]{} -1$.

4. (a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1[$ donc elle réalise une bijection de $[0;1[$ dans $\left[f(0);\lim\limits_{x\to1^-} f(x)\right[= [1;+\infty[$.

De plus pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n \in [1;+\infty[$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution (qu'on note u_n) sur $[0;1[$.

De plus on a $f(0)=1$ donc $u_1=0$.

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a par stricte décroissance de f :

$$f(u_n) = n < n+1 = f(u_{n+1}) \Longleftrightarrow u_n < u_{n+1}$$

(u_n) est donc croissante et majorée par 1 donc elle converge.
De plus en posant f^{-1} la bijection réciproque de f sur $[0;1[$, on a

$$f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

donc :

$$f(u_n) = n \Longleftrightarrow u_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Exercice 4. : eml 2018

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

1. **a.** Notons, pour tout $i \in \mathbf{N}$, P_i l'événement : « Obtenir pile au i-ème lancer » et $F_i = \overline{P_i}$. On a alors

$$\begin{aligned}
(X=0) &= P_1 \cap P_2 \\
(X=1) &= (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\
(X=2) &= (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).
\end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(X=n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer et le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. On obtient donc

$$\boxed{\begin{cases}
\mathbf{P}(X=0) &= \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}, \\[2ex]
\mathbf{P}(X=1) &= 2 \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{27}, \\[2ex]
\mathbf{P}(X=2) &= 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{27}.
\end{cases}}$$

b. Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(X=n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer, le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. Formellement :

$$(X=n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1}\left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} F_j\right)\right)\right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=n) &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{2}{3} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} \\
&= (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X=n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.}$$

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

2. **a.** U prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier n, il existe une suite de tirages amenant à n Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée n. Autrement dit,

$$\boxed{U(\Omega) = \mathbf{N}.}$$

b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Sachant $(X = n)$, l'urne est composée de $(n+1)$ boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à n donc

$$\boxed{U^{(X=n)} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!]).}$$

c. Soit $k \in \mathbf{N}$. On commence par observer que $(U = k) \cap (X = n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\{(X = n)\}_{n\in\mathbf{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(U = k, X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}(U = k, X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}_{(X=n)}(U = k)\mathbf{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathbf{P}(X = n) \quad \text{(d'après } \mathbf{2.b}\text{)},
\end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.
En injectant le résultat trouvé en **1.b**, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} \\
&= 4\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\
&= 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1 - 1/3} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$$

d. U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} k\mathbf{P}(U = k)$ converge absolument. Les

valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} k\mathbf{P}\left(U=k\right) &= \sum_{k\geqslant 0} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \sum_{k\geqslant 1} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \frac{2}{9}\sum_{k\geqslant 1} k\frac{1}{3^{k-1}}\\ &= \frac{2}{9}\sum_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $1/3$. La série converge donc et alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[U\right] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbf{P}\left(U=k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{3^{k-1}}\\ &= \frac{2}{9}\times\frac{1}{(1-1/3)^2}\\ &= \frac{2}{9}\times\frac{9}{4}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}\left[U\right] = \frac{1}{2}.}$$

Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de $U(U-1)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} k(k-1)\mathbf{P}\left(U=k\right) &= \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\frac{2}{3^{k+1}}\\ &= \frac{2}{27}\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison $1/3$, il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que $U(U-1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[U(U-1)\right] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbf{P}\left(U=k\right)\\ &= \frac{2}{27}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\\ &= \frac{2}{27}\times\frac{2}{(1-1/3)^3}\\ &= \frac{2}{27}\times\frac{2\times 27}{8}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U-1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$\mathbf{E}\left[U^2\right] = \mathbf{E}\left[U(U-1)\right] + \mathbf{E}\left[U\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que :

$$\boxed{\mathbf{V}\left(U\right) = \mathbf{E}\left[U^2\right] - \mathbf{E}\left[U\right]^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.}$$

3. **a.** V prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un tirage amenant à n Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas $(V = n)$ est réalisé. Ainsi,

$$\boxed{V(\Omega) = \mathbf{N}.}$$

b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $V^{(X=n)}$ prend ses valeurs entre 0 et n et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(X=n)}(V = k) &= \mathbf{P}_{(X=n)}(X - U = k)\\ &= \mathbf{P}_{(X=n)}(U = n - k)\\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{V^{(X=n)} \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!]).}$$

c. En reprenant les calculs effectués en **2.b**, on observe que la loi de V est la même que celle de U. Autrement dit,

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}\left(V = k\right) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$$

4. Soient $k, l \in \mathbf{N}$. On a

$$(U = k, V = \ell) = (U = k, X - U = \ell) = (U = k, X = k + \ell).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(U = k, V = \ell\right) &= \mathbf{P}\left(U = k, X = k + \ell\right)\\ &= \mathbf{P}_{(X=k+\ell)}(U = k) \times \mathbf{P}\left(X = k + \ell\right)\\ &= \frac{1}{k+\ell+1} \times (k+\ell+1)\frac{4}{3^{k+\ell+2}}\\ &= \frac{4}{3^{k+\ell+2}}\\ &= \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{\ell+1}}\\ &= \mathbf{P}\left(U = k\right)\mathbf{P}\left(V = \ell\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ sont indépendantes.}}$$

5. U et V étant indépendantes d'après **4**, il vient

$$\boxed{\mathbf{Cov}(U, V) = 0.}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X,U) &= \mathbf{Cov}(V+U,U)\\ &= \mathbf{Cov}(V,U)+\mathbf{Cov}(U,U)\\ &= 0+\mathbf{V}(U)\\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{Cov}(X,U)=\frac{3}{4}.}$$

Partie III : Étude d'un jeu

6. Simulation informatique

a. On propose la fonction suivante :

```
function x = simule_X()
    nPile = 0
    nFace = 0
    while (nPile<2)
        if (rand()<2/3)
            nPile = nPile +1
        else
            nFace = nFace +1
        end
    end
    x = nFace
endfunction
```

b. La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de A.

c. On observe que pour $p \approx 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le jeu est équilibré pour } p \approx 0,8.}$$

7. Étude de la variable aléatoire Y

a. Z compte le rang du premier succès (« obtenir Pile ») dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre (p, la probabilité de faire Pile). Ainsi,

$$\boxed{Z \rightsquigarrow \mathcal{G}(p).}$$

b. Y étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation $Y = Z-1$. Il s'ensuit que Y admet une espérance et une variance et que

$$\boxed{\mathbf{E}[Y]=\mathbf{E}[Z-1]=\mathbf{E}[Z]-1=\frac{1}{p}-1=\frac{1-p}{p}}$$

et

$$\boxed{\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(Z-1) = \mathbf{V}(Z) = \frac{1-p}{p^2}.}$$

c. Posons $q = 1 - p$. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \geqslant n) &= \mathbf{P}(Z - 1 \geqslant n) \\
&= \mathbf{P}(Z \geqslant n+1) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\
&= pq^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-(n+1)} \\
&= pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\
&= pq^n \times \frac{1}{1-q} \\
&= q^n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(Y \geqslant n) = (1-p)^n.}$$

8. **a.** En appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\{(X = n)\}_{n \in \mathbf{N}}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \leqslant Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, X \leqslant Y) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y \geqslant n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\,\mathbf{P}(Y \geqslant n) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes).}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\,\mathbf{P}(Y \geqslant n).}$$

b. En injectant les résultats établis en **1.b** et **7.c** dans la formule trouvée en **8.a**, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \leqslant Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\,\mathbf{P}(Y \geqslant n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} q^n \\
&= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{q}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1-q/3)^2} \\
&= \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 \\
&= \frac{4}{(3-q)^2} \\
&= \frac{4}{(2+p)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(X \leqslant Y) = \frac{4}{(2+p)^2}.}$$

c. Le jeu est équilibré quand $\mathbf{P}(X \leqslant Y) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\
&\Leftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow p \text{ est racine de } X^2 + 4X - 4 \\
&\Leftrightarrow p \in \left\{-2 - 2\sqrt{2},\ -2 + 2\sqrt{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Mais $-2 - 2\sqrt{2} < 0$ et $-2 + 2\sqrt{2} > 0$ et p est nécessairement positif. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le jeu est équitable pour } p = 2\sqrt{2} - 2.}$$

Remarque : On a $\sqrt{2} \approx 1,41$ donc $2\sqrt{2} - 2 \approx 0,82$, ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question **6.c**.