Corrigé du concours Blanc 2 : Ecricome

Exercice 1. : ecricome 2017

Partie A : Étude de la matrice A

1. $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   $(A-I)^3 = (A-I)^2(A-I) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Puisque $(A-I)^3$ est la matrice nulle, le polynôme $(X-1)^3 \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Par le cours, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme, soit ici :
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}.$$
   Par ailleurs, 1 est valeur propre de A car la matrice $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (les deux premières colonnes sont opposées donc colinéaires).
   Par conséquent :
$$\mathrm{Sp}(A) = \{1\}.$$

3. La matrice A est inversible car 0 n'est pas valeur propre.
   Elle n'est pas diagonalisable car, si elle l'était, elle serait semblable à une matrice diagonale où les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A, donc tous égaux à 1 ; autrement dit, A serait semblable à I donc égale à I, ce qui est absurde.
   (en effet, si A est semblable à I, alors il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = I$, donc $A = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$).

Partie B : Recherche d'une solution particulière

4. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ comme composée de :
   - la fonction polynomiale $x \mapsto 1+x$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1,1[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$
   - et de la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

   Il est important de noter que $1+x$ ne s'annule pas sur l'intervalle considéré (ouvert en -1) car la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ (ni même dérivable) en 0.

   On dérive deux fois φ pour obtenir $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
   Pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad ; \quad \varphi''(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$
   et donc :
$$\varphi'(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$

5. La fonction φ étant de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0 (sur un intervalle ouvert contenant 0), elle y admet un développement limité à l'ordre 2 donné par la formule de Taylor-Young :
$$\varphi(x) = \underbrace{\varphi(0)}_{=1} + \underbrace{\varphi'(0)}_{=\frac{1}{2}} x + \underbrace{\frac{\varphi''(0)}{2}}_{=-\frac{1}{8}} x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon \underset{0}{\longrightarrow} 0$$
   Le réel α recherché vaut donc $-\dfrac{1}{8}$.

6. En développant selon « $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ », on a :

$$\begin{aligned}
\big(P(x)\big)^2 &= \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)^2 \\
&= 1+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(-\frac{x^2}{8}\right)^2+2\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}\times\left(-\frac{x^2}{8}\right)\right) \\
&= 1+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}+x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8} \\
&= 1+x-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64}
\end{aligned}$$

7. On obtient donc :

$$\big(P(C)\big)^2 = P^2(C) = I+C-\frac{1}{8}C^3+\frac{1}{64}C^4 = I+C = A$$

(d'après 1., $C^3=0$ et donc aussi $C^4=0$).

La matrice $M=P(C)$ vérifie donc bien $M^2=A$, et :

$$\begin{aligned}
M &= P(C) = I+\frac{1}{2}C-\frac{1}{8}C^2 \\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\-3&3&0\end{pmatrix}-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-6&6&0\\-6&6&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-1&4\\1&3&4\\-6&6&4\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Partie C : Résolution complète de l'équation

8. (a) En notant U, V et W les vecteurs-colonnes correspondant respectivement à u, v et w, les relations $v=f(w)-w$ et $u=f(v)-v$ se traduisent ainsi :

$$V = AW-W = CW = \begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\-3&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$$U = AV-V = CV = \begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&2\\-3&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}$$

et on a donc : $v=(1,1,-3)$ et $u=(-6,-6,0)$.

(b) Comme $\mathbf{R}^3$ est de dimension 3, montrer que la famille de trois vecteurs (u,v,w) est une base revient à prouver qu'elle est génératrice, c'est-à-dire que son rang vaut 3 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(U|V|W) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-6&1&1\\-6&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix} =_{L_2\leftarrow L_2-L_1} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-6&1&1\\0&0&-1\\0&-3&1\end{pmatrix} \\
&=_{L_2\leftrightarrow L_3} \underbrace{\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-6&1&1\\0&-3&1\\0&0&-1\end{pmatrix}}_{\text{(matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls)}} = 3
\end{aligned}$$

(c) Calculons $f(u)$ en utilisant la matrice A :

$$AU = \begin{pmatrix}0&1&2\\-1&2&2\\-3&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}$$

donc $f(u)=u$ *(u est un vecteur propre de f associé à l'unique valeur propre 1).*

Les relations de l'énoncé nous donnent directement $f(v)$ et $f(w)$ comme combinaisons linéaires de u, v et w :

$$f(v) = u+v \quad ; \quad f(w) = v+w.$$

On en déduit la matrice de f dans la base (u, v, w) :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array} = T$$

(d) Puisque A et T représentent l'endomorphisme f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement, en notant $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ (donc inversible), on a :

$$P^{-1}AP = T.$$

9. (a) Supposons que $N^2 = T$. Alors :

$$NT = NN^2 = N^3 = N^2N = TN.$$

En posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, la relation $NT = TN$ s'écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} a & a+b & b+c \\ d & d+e & e+f \\ g & g+h & h+i \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{pmatrix}}$$

ce qui nous donne le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & a+d \\ a+b & = & b+e \\ b+c & = & c+f \\ d & = & d+g \\ d+e & = & e+h \\ e+f & = & f+i \\ g+h & = & h \\ h+i & = & i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} d & = & 0 \\ a & = & e \\ b & = & f \\ g & = & 0 \\ d & = & h \\ e & = & i \\ g & = & 0 \\ h & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = e = i \\ d = g = h = 0 \\ b = f \end{array}\right.$$

Par conséquent, si $N^2 = T$, alors N est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}$.

(b) Si $N^2 = T$, alors avec les notations de la question précédente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \\ b^2+2ac & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & \frac{1}{2} \\ c & = & -\frac{1}{8} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & -\frac{1}{2} \\ c & = & \frac{1}{8} \end{array}\right.$$

On obtient donc deux solutions possibles :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = -N_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie qu'il s'agit effectivement de solutions à l'équation $({N_1}^2 = {N_2}^2 = T)$.

10. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. En posant $N = P^{-1}MP$, on a :

$$M^2 = A \iff \left(PNP^{-1}\right)^2 = A \iff PN^2P^{-1} = A \iff N^2 = P^{-1}AP \iff N^2 = T$$

L'équation $M^2 = A$ admet donc exactement deux solutions :

$$M_1 = PN_1P^{-1} \quad \text{et} \quad M_2 = PN_2P^{-1} \ (= -M_1).$$

11. La matrice nulle n'étant pas solution de l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, l'ensemble E n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 2. : ecricome 2015

I - Une loi exponentielle et une suite.

1. (a) D'après le cours, une densité de X, son espérance et sa variance sont données par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \quad , \quad E(X) = \frac{1}{1} = 1 \quad , \quad V(X) = \frac{1}{1^2} = 1.$$

(b) La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt.$$

Pour $x < 0$, on a alors :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$

et pour $x \geqslant 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{x} e^{-t}\ dt = -\int_{0}^{x} -e^{-t}\ dt = -\left[e^{-t}\right]_0^x = -(e^{-x} - 1) = 1 - e^{-x}.$$

On obtient bien en rassemblant :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2. (a) On pose $f(x) = e^x - x - 1$ sur $\mathbf{R}$, f est dérivable et :

$$f'(x) = e^x - 1$$

et on résout :

$$e^x - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow e^x \geqslant 1 \Longleftrightarrow x \geqslant 0$$

ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$		↘	0	↗	

avec $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc f admet un minimum en 0, égal à 0.

On en déduit que $f(x) \geqslant 0$ sur $\mathbf{R}$, et donc que

$$e^x \geqslant x + 1.$$

De plus l'égalité est équivalente à $f(x) = 0$, ce qui d'après le tableau de variation, n'est réalisé que pour $x = 0$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$:

- **Initialisation** : pour $n = 1$, $u_1 = 1 > 0$ donc la propriété est vraie.
- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $u_n > 0$, alors (l'exponentielle est strictement croissante) :

$$-u_n < 0 \quad \text{donc} \quad e^{-u_n} < 1 \quad \text{donc} \quad 1 - e^{-u_n} = F(u_n) = u_{n+1} > 0$$

  et la propriété est vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion** : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.

(c) On calcule le terme u_{n+1} sous la forme $u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}$:

```
U=zeros(1,100)
U(1)=1
for n=1:99 do
   U(n+1)=1-exp(-U(n))
end
plot(U,"+")
```

(d) On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.

(e) On n'a aucune information sur le sens de variation de F, donc on écarte la récurrence : on passe par le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = 1 - e^{-u_n} - u_n.$$

Or la question 2a donne $e^x \geqslant x + 1$ sur $\mathbf{R}$, en appliquant cette inégalité en $x = -u_n$ on obtient :

$$e^{-u_n} \geqslant 1 - u_n \quad \text{donc} \quad 1 - e^{-u_n} - u_n = u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$$

On en déduit, comme conjecturé, que la suite (u_n) est décroissante.

(f) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge. Par continuité de la fonction F, sa limite l vérifie :

$$l = F(l) \iff l = 1 - e^{-l} \iff e^{-l} = 1 - l$$

et le cas d'égalité de la question 2a montre que $-l = 0$, donc que $l = 0$.

(g) Pas évident. En appliquant la question 2a à $x = -u_n$ comme précédemment, on n'arrive à rien. Il faut alors penser à l'appliquer à $x = u_n$, en écrivant :

$$u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = 1 - \frac{1}{e^{u_n}}.$$

Or on sait par 2a que

$$e^{u_n} \geqslant u_n + 1 \quad \text{donc par décroissance de l'inverse sur } \mathbf{R}_+^*, \quad \frac{1}{e^{u_n}} \leqslant \frac{1}{u_n + 1}$$

et enfin en multipliant par $-1 < 0$ et en ajoutant 1 :

$$-\frac{1}{e^{u_n}} \geqslant -\frac{1}{u_n + 1} \quad \text{et enfin} \quad u_{n+1} = 1 - \frac{1}{e^{u_n}} \geqslant 1 - \frac{1}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - 1}{u_n + 1} = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

On passe à l'inverse strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ (u_n et u_{n+1} sont strictement positifs donc les deux termes de l'inégalité le sont) :

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

(h) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$:

- **Initialisation** : pour $n = 1$, $u_1 = 1$ et $\frac{1}{1} = 1$ donc la propriété est vraie.

- **Hérédité** : supposons qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $u_n \geqslant \frac{1}{n}$, on va se servir de la question précédente pour passer à u_{n+1}. On fait apparaître $\frac{1}{u_n}$: par décroissance de l'inverse sur $\mathbf{R}_+^*$,

$$\frac{1}{u_n} \leqslant n \quad \text{donc} \quad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{u_n} + 1 \leqslant n + 1$$

et avec la décroissance de l'inverse à nouveau,

$$u_{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion** : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

(i) Le vecteur S représente les sommes cumulées du vecteur U contenant la suite u_n : il représente donc :

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

donc les termes de la somme partielle de la série $\sum u_n$.

On remarque que cette suite semble aller vers l'infini, et on conjecture donc que la série de terme général u_n diverge vers $+\infty$.

Pour une explication plus précise, on peut remarquer que le vecteur Y représente les termes de la suite $(\ln(n))_{n\in\mathbf{N}}$, et que S est au-dessus de Y, donc que la somme partielle est supérieure à $\ln n$ qui diverge vers $+\infty$.

(j) On a vu que $u_n \geqslant \frac{1}{n}$, et la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (Riemann). Les termes généraux sont tous deux positifs, donc par théorème de comparaison, la série de terme général u_n diverge.

II - Une fonction et une variable à densité.

1. (a) g est nulle sur $]-\infty;0[$ et c'est un produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$: elle est donc dérivable sur ces deux intervalles.

En 0, la continuité doit être vérifiée des deux côtés : on a $g(0) = 0e^{-0} = 0 \times 1 = 0$ et

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = g(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} = xe^{-x} = 0e^0 = 0 = g(0)$$

donc g est continue en 0. De même la dérivabilité doit être vérifiée des deux côtés, mais cette fois les dérivées à gauche et à droite doivent également être égales. On a pour $x < 0$:

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

et pour $x > 0$,

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{xe^{-x}-0}{x} = e^{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} e^{-0} = 1$$

donc g est dérivable à gauche en 0, de dérivée égale à 0, et à droite, de dérivée égale à 1. Les deux dérivées ne sont pas égales donc g n'est pas dérivable en 0.

(b) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ (déjà vu) et :

$$g'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

qui est du signe de $1-x$, donc on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$g(x)$	0	↗	e^{-1}	↘	0

avec $g(1) = 1e^{-1} = e^{-1}$, et en $+\infty$, par croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

(c) g est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$ comme produit de fonctions C^2, et

$$g''(x) = -e^{-x} + 1(-e^{-x}) + x(e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$$

donc

x	0		2		$+\infty$
$g''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$

et g est donc concave sur $]0;2]$ et convexe sur $[2;+\infty[$.

(d) On trace une fonction nulle sur $\mathbf{R}_-^*$, puis une tangente en 0^+ d'équation :

$$y = f'_d(0)(x-0) + f(0) = x$$

On trace alors une courbe sur $\mathbf{R}_+$ partant de 0 sous sa tangente (concave), allant vers un maximum en $(1, 0.37)$ et restant concave jusqu'à $(2, 2e^{-2})$ et convexe à partir de là, avec une limite nulle en $+\infty$.

Remarque : comme e^{-2} n'est pas donné, on peut le mettre au hasard entre 0 et e^{-1}, on bien calculer (si on a la foi et le temps...) :

$$e^{-2} = (e^{-1})^2 \simeq (0,37)^2 = \frac{37^2}{100^2} = \frac{(30+7)^2}{10^4} = \frac{900+49+2\times 210}{10^4} = \frac{1369}{10^4} = 0,1369.$$

2. (a) g est continue sur $\mathbf{R}$ (1a), nulle sur $\mathbf{R}-$ et positive sur $\mathbf{R}_+$ par produit de fonctions positives donc g est positive sur $\mathbf{R}$. On a de plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x}\ dx.$$

La première intégrale converge et vaut 0 (fonction nulle), et la seconde converge et vaut 1 (espérance de la loi exponentielle de paramètre 1) donc par somme, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx$ converge et vaut1 : g est donc une densité de probabilité.

(b) g est continue sur $\mathbf{R}$: on en déduit que G est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $G' = g$, qui est continue sur $\mathbf{R}$ donc G y est de classe C^1.

(c) Comme dans la partie I, on a $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\ dt$, avec deux cas : si $x < 0$,

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$

et si $x \geqslant 0$,

$$G(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_0^x te^{-t}\ dt = \int_0^x te^{-t}\ dt.$$

On intègre par parties avec :

$$u = t \quad \text{et} \quad v = -e^{-t}$$

qui sont de classe C^1 et

$$u' = 1 \quad \text{et} \quad v' = e^{-t}$$

donc

$$G(x) = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\ dt = -xe^{-x} + 0 - \left[e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - (e^{-x} - 1) = 1 - xe^{-x} - e^{-x} = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

En rassemblant on obtient bien :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(d) On considère l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\ dt.$$

La première intégrale converge absolument et vaut 0, la seconde converge absolument (moment d'ordre deux de la loi exponentielle de paramètre 1) et vaut par formule de Koenig-Huyghens, avec X qui suit cette loi exponentielle :

$$E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = 1 + 1^2 = 2$$

donc par somme, Y admet bien une espérance et :

$$E(Y) = 0 + 2 = 2.$$

3. (a) On sait que $Y(\Omega) = [0; +\infty[$ donc
$$Z(\Omega) = (e^Y)(\Omega) = [1; +\infty[$$
On en déduit que pour tout $x < 1$, $H(x) = \mathrm{P}(Z \leqslant x) = 0$. Pour tout $x \geqslant 1$, par stricte croissance de ln :
$$(Z \leqslant x) = (e^Y \leqslant x) = (Y \leqslant \ln x) \quad \text{donc} \quad H(x) = \mathrm{P}(Z \leqslant x) = \mathrm{P}(Y \leqslant \ln x) = G(\ln x).$$
Or on sait que $x \geqslant 1$, donc $\ln x \geqslant 0$ et enfin :
$$H(x) = G(\ln x) = 1 - e^{-\ln x}(1 + \ln x) = 1 - \frac{1 + \ln x}{e^{\ln x}} = 1 - \frac{1 + \ln x}{x}.$$
Enfin en rassemblant on en déduit que :
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1+\ln x}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(b) La fonction H est de classe C^1 sauf peut-être en 1, donc continue également. On teste la continuité en 1 : on calcule
$$H(0) = 1 - \frac{1 + \ln(1)}{1} = 1 - \frac{1}{1} = 0 \ , \ \lim_{x \to 1^-} H(x) = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0 \ , \ \lim_{x \to 1^+} H(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 - \frac{1 + \ln x}{x} = 1 - \frac{1 + \ln(1)}{1} = 0$$
donc H est bien continue en 0 car les deux limites sont égales à $H(0)$, donc H est continue sur $\mathbf{R}$ et Z est une variable à densité.

On obtient finalement une densité de Z en dérivant H sauf en 1, valeur arbitraire :
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\ln x}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
avec pour $x \geqslant 0$,
$$h(x) = -\frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times (1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}.$$

(c) On cherche la nature de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \times h(t)\ dt = \int_{-\infty}^{1} 0\ dt + \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\ dt.$$
La première intégrale converge absolument (et vaut 0), et pour la seconde on remarque que pour $x \geqslant 1$, $\frac{\ln t}{t} \geqslant \frac{1}{t}$, ou bien que $\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc $\frac{1}{t} = o_{+\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right)$.

Dans les deux cas, le théorème de comparaison, avec les deux fonctions qui sont positives et l'intégrale de $\frac{1}{t}$ qui diverge (Riemann), l'intégrale diverge donc Z n'admet pas d'espérance.

Exercice 3. : **Ecricome 2016**

Préliminaire

1. X et Y sont indépendantes et de même loi donc pour tout couple (i, j) de $\mathbf{N}^2$ on a :
$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P(X = i)P(Y = j) = P(X = i)P(X = j)$$
et de même
$$P([X = j] \cap [Y = i]) = P(X = j)P(Y = i) = P(X = j)P(X = i)$$
donc X et Y sont échangeables puisqu'on obtient la même valeur dans les deux cas.

2. Soit $i \in \mathbf{N}$, on somme la relation pour $j \in \mathbf{N}$, on obtient :
$$\sum_{j=0}^{+\infty} P([X = i] \cap [Y = j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} P([X = j] \cap [Y = i])$$
et la formule des probabilités totales avec le sce $(Y = j)_{j \in \mathbf{N}}$ permet de reconnaître :
$$\forall i \in \mathbf{N},\ P(X = i) = P(Y = i)$$

Etude d'un exemple

3. (a) X prend la valeur 2 lorsqu'on a tiré une boule blanche, donc il faut mettre dans la condition un évènement de même probabilité, donc de probabilité $\frac{b}{n+b}$. rand() suivant la loi uniforme, on remplit les trou par :

```
r<b/(b+n)
```

(b) Pour la variante 1, lorsque x prend la valeur 1, on rajoute c boules noires donc on refait la même expérience pour y mais avec $b' = b$ et $n' = n + c$ boules noires.
De même lorsque x prend la valeur 2, on fait la même expérience avec $b' = b + c$ et $n' = n$.

Pour la variante 2 c'est inversé : lorsque $x = 1$ on a $b' = b + c$ et $n' = n$, lorsque $x = 2$ on a $b' = b$ et $n' = n + c$.

Enfin pour la variante 3 on refait strictement la même expérience donc il n'y a aucun changement à effectuer sur b et n. On obtient donc :

```
if variante==1 then
    if x==1 then
        n=n+c
    else
        b=b+c
    end
else if variante==2 then
    if x==1 then
        b=b+c
    else
        n=n+c
    end
y=tirage(b,n)
```

(c) Plus compliqué. Pour approximer la loi il faut approximer chaque probabilité par la fréquence d'apparition des évènements.

Après la boucle for le programme divise chaque vecteur, donc chaque coefficient du vecteur, par le nombre N d'expériences : il faut donc qu'à la fin de la boucle chaque coefficient soit égal au nombre de réalisations de l'évènement correspondant lors des N simulations.

Pour cela à chaque fois nouvelle simulation, donc à chaque passage dans la boucle, il faut rajouter 1 au coefficient correspondant à l'évènement réalisé. Or on a mis le résultat de la nouvelle simulation dans les variables x et y ; c'est pourquoi c'est bien à l'élément loiX(x) qu'on a rajouté 1, et on fait de même dans loiY(y) et loiXY(x,y) avec :

```
loiX(x)=loiX(x)+1
loiY(y)=loiY(y)+1
loiXY(x,y)=loiXY(x,y)+1
```

Remarque : la questions est extrêmement mal posée car il est possible de remplir les deux tirets sans rien comprendre au programme par simple "recopiage" de la ligne déjà donnée par l'énoncé. Il aurait fallu exiger des candidats l'explication de ces trois lignes de code, ce qui n'est pas fait, donc il n'y a aucun moyen de savoir si un candidat qui répond a compris ou arnaqué....

(d) Pour tester l'échangeabilité il suffit d'avoir $P([X = 1] \cap [Y = 2]) = P([X = 2] \cap [Y = 1])$ puisque le support de X et de Y est $\{1; 2\}$. Il suffit donc de regarder si la matrice loiXY est symétrique.

Pour l'indépendance on teste tous les produits de loiX par loiY en on vérifie si cela donne loiXY. On obtient finalement :

- X et Y sont échangeables dans les variante 1 et 3, mais pas dans la variante 2.
- Pour la variante 1, dès le premier produit on a $0,66 \times 0,66 \simeq 0,44 \neq 0,19837$ donc X et Y ne sont pas indépendants.
- Pour la variante 2, dès le premier produit on a $0,58 \times 0,66 \simeq 0,38 \neq 0,33258$ donc X et Y ne sont pas indépendants.
- Pour la variante 3, les quatre produits fonctionnent : $0,66 \times 0,66 \simeq 0,44 \simeq 0,44466$, $0,66 \times 0,33 \simeq 0,22 \simeq 0,22098 \simeq 0,22312$ et enfin $0,33 \times 0,33 \simeq 0,11 \simeq 0,11124$. Les variables X et Y semblent donc indépendantes.

4. (a) X a pour support $\{1, 2\}$ et par équiprobabilité de tirer chaque boule on a :

$$P(X = 1) = \frac{n}{b+n} \quad , \quad P(X = 2) = \frac{b}{b+n}.$$

(b) X et Y ont pour support $\{1;2\}$. On a de plus

$$P([X=1]\cap[Y=1]) = P([X=1])P_{[X=1]}([Y=1]) = \frac{n}{b+n}\times\frac{n+c}{b+n+c} = \frac{n(n+c)}{(b+n)(b+n+c)}$$

puis de même :

$$P([X=1]\cap[Y=2]) = P([X=2]\cap[Y=1]) = \frac{nb}{(b+n)(b+n+c)} \quad \text{et} \quad P([X=2]\cap[Y=2]) = \frac{b(b+c)}{(b+n)(b+n+c)}.$$

(c) On a vu que $Y(\Omega)=\{1;2\}$, et par probabilités totales avec le sce $([X=1],[X=2])$ on obtient :

$$P(Y=1) = P([X=1]\cap[Y=1]) + P([X=2]\cap[Y=1]) = \frac{n(n+b+c)}{(b+n)(b+n+c)} = \frac{n}{b+n}$$

et

$$P(Y=2) = P([X=1]\cap[Y=2]) + P([X=2]\cap[Y=2]) = \frac{b(n+b+c)}{(b+n)(b+n+c)} = \frac{b}{b+n}$$

donc Y suit la même loi que X.

(d) On a bien obtenu $P([X=1]\cap[Y=2]) = P([X=2]\cap[Y=1])$ donc X et Y sont échangeables. Par contre en calculant

$$P(X=1)P(Y=1) = \frac{n}{b+n}\times\frac{n}{b+n}$$

et

$$P([X=1]\cap[Y=1]) = \frac{n}{b+n}\times\frac{n+c}{b+n+c}$$

on se rend compte que pour avoir égalité, il faudrait avoir

$$\frac{n}{b+n} = \frac{n+c}{b+n+c}] \Longleftrightarrow n(b+n+c) = (n+c)(b+n) \Longleftrightarrow nb+n^2+nc = nb+n^2+bc+nc \Longleftrightarrow bc=0$$

ce qui est absurde puisque b et c sont non nuls, et on en déduit que

$$P([X=1]\cap[Y=1]) \neq P([X=1])P([Y=1])$$

et les variables X et Y ne sont pas indépendantes.