Concours Blanc 2 : Edhec

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
L'utilisation de documents, d'une calculatrice ou de tout appareil électronique est strictement interdite.
Les abréviations sont interdites. Les notions doivent être écrites en toutes lettres .
Toute abréviation et toute phrase écrite au crayon à papier ne seront pas lues par le correcteur.

Exercice 1.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.
4.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
   (c) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
5.
   (a) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xe^x - e^x + 1$.
   (b) En déduire le signe de $g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

   On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
7.
   (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = f(-x)$.
   (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
8. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
9. Écrire un programme en `Scilab` permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.

Exercice 2.
On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1, e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\, dt$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.

(b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.

(c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.

2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

(c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
A=[.......]
disp(.....)
```

4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$.

(b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.

(c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 3.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, P). On désigne par p un réel de $]0,1[$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.

On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$P(Z=1) = p \text{ et } P(Z=-1) = 1-p.$$

Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) = \begin{cases} U(\omega) \text{ si } Z(\omega) = 1 \\ V(\omega) \text{ si } Z(\omega) = -1 \end{cases}$$

Autrement dit :

$$X = \begin{cases} U \text{ si } Z = 1 \\ V \text{ si } Z = -1 \end{cases}$$

On note F_X, F_U et F_V les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $F_U(x)$ et $F_V(x)$ selon les valeurs de x.

2. (a) Etablir, grâce au système complet d'événements $((Z=1),(Z=-1))$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x).$$

(b) Vérifier que $X(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $F_X(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } x > 3.$$

(c) On admet que X est une variable à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

(d) Etablir que X admet une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$, puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.
   (a) Vérifier que l'on a : $X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}$.
   (b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de $E(X)$.
   (c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.
4. (a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi de $2T-1$.
   (b) On rappelle que grand(1,1,'unf',a,b) et grand(1,1,'bin',1,p) sont des commandes Scilab permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a,b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
   Ecrire des commandes Scilab permettant de simuler U, V, Z, puis X.

Problème :

Partie 1 : questions préliminaires.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.
   (b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$.
   (c) Etablir par encadrement que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0$.
   (d) En déduire que : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.
2. Soit m un entier naturel fixé. A l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir l'égalité :
$$\forall q \geqslant m, \quad \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}.$$
3. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, on a :
$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} P((S_n = j) \cap (X_{n+1} = k-j)).$$
   (b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :
$$\forall k \in [\![n, +\infty[\![, \quad P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}.$$
   (c) En déduire, pour tout x de $]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}.$$
   (d) On rappelle que la commande grand(1,n,'geom',p) permet à Scilab de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
   Compléter les commandes Scilab suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
n=input('entrez une valeur de n supérieure à 1: ')
S=------
disp(S)
```

Partie 2 : Etude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = -\frac{q^k}{k \ln p}.$$

1. (a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

   (b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = u_k.$$

2. (a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

   (b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que : $V(X) = \dfrac{-q(q + \ln p)}{(p \ln p)^2}$.

3. Soit k un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, est la loi binomiale de paramètres k et p.

   (a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question **??** de la partie 1, pour montrer que :

   $$P(Y = 0) = 1 + \frac{\ln(1 + q)}{\ln p}.$$

   (b) Après avoir montré que, pour tout couple (k, n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $P(Y = n) = -\dfrac{p^n q^n}{n \ln p} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \left(q^2\right)^{k-n}$.
   En déduire, grâce à la question **??** de la première partie, l'égalité :

   $$P(Y = n) = -\frac{q^n}{n(1 + q)^n \ln p}.$$

   (c) Vérifier que l'on a $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.

   (d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln p$ et q.

   (e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a :

   $$V(Y) = -\frac{q(q + (1 + q) \ln p)}{(\ln p)^2}.$$