Concours Blanc 2 : Edhec corrigé

Exercice 1. : edhec 2003

1. On réalise un tableau de signe :

$$e^x - 1 \geqslant 0 \iff e^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$$

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
$\frac{e^x-1}{x}$		$+$	‖	$+$	

et on obtient bien que $\frac{e^x-1}{x} > 0$ pour tout $x \neq 0$.

2. f est continue sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ comme composée de $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$ continue sur ces intervalles comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (d'après 1.), avec la fonction ln continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   En 0 on a

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1+x+x^2/2+o(x^2)-1}{x}\right) = \ln\left(1+x/2+o(x)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(1) = 0 = f(0)$$

   donc f est continue en 0, et finalement f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

3. f est de classe C^1 sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ comme composée de $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$ continue sur ces intervalles comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (d'après 1.), avec la fonction ln de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   De plus pour tout $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} \times \frac{e^x \times x - (e^x-1)}{x^2} = \frac{x}{e^x-1} \times \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x-1)}.$$

4.

   (a) On utilise le développement limité de l'exponentielle : pour le numérateur, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{donc} \quad xe^x = x + x^2 + o(x^2)$$

   puis

$$xe^x - e^x + 1 = x + x^2 + o(x^2) - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

   Pour le dénominateur, on a :

$$x(e^x-1) = x(1 + x + o(x) - 1) = x(x + o(x)) = x^2(1 + o(1))$$

   D'où

$$f'(x) = \frac{x^2\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)}{x^2(1+o(1))} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\forall x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = \frac{1}{x}\ln\left(1+x/2+o(x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\times x/2 = 1/2$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 1/2$.
Donc $f'(0) = \frac{1}{2}$.

(c) f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$ (d'après les questions 4.(b) et (c)) donc f' définie et continue en 0 donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

5.

(a) $g(x) = xe^x - e^x + 1$ est de classe C^∞ comme somme et produit de fonctions de classe C^∞, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

est du signe de x, donc g est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(b) On en déduit que g admet un minimum strict en 0, égal à

$$g(0) = 0 - e^0 + 1 = 0.$$

D'où g est strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf en 0 où $g(0) = 0$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) > 0$ et $x(e^x-1) = x^2\frac{e^x-1}{x} > 0$ comme produit de fonctions strictement positives, et finalement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) > 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{1}{2} > 0$$

donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x(1-e^{-x})}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

par composée de limites, car par croissances comparées $\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
D'autre part

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$$

par composée de limites, car par quotient de limites $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

6. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$:

Initialisation : $u_0 > 0$ par hypothèses, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé te que $u_n > 0$, alors par stricte croissance de f

$$u_{n+1} = f(u_n) > f(0) = 0 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} > 0$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n > 0.$$

7.

(a) Pour $x = 0$, on a

$$f(0) - 0 = 0 \quad \text{et} \quad f(-0) = 0 \quad \text{donc} \quad f(0) - 0 = f(-0)$$

Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - x = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{\frac{e^x-1}{x}}{e^x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x - 1}{xe^x}\right) = \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = f(-x). \end{aligned}$$

donc on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - x = f(-x).$$

(b) Pour tout $x > 0$, $-x < 0$ donc $f(-x) < f(0) = 0$ par stricte croissance de f et enfin :

$$\forall x > 0, \quad f(x) - x = f(-x) < 0.$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc on a $f(u_n) - u_n < 0$, et enfin

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

et (u_n) est décroissante.

8. (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge vers une valeur l vérifiant :

$$f(l) = l \quad \text{(car } f \text{ est continue en } l \text{ d'après la question 2.)} \iff f(l) - l = 0 \iff f(-l) = 0$$

$$\iff -l = 0 \quad \text{(unique solution par bijectivité de } f \text{ (cf question 5.(b)))} \iff l = 0.$$

9.
```
u= 1
n=0
while u > 10^{-3} do
   n=n+1
   u= log( (exp(u) - 1)/u )
end
disp(n)
```

Exercice 2. : edhec 2017

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\varphi(P))(x) = \displaystyle\int_0^1 P(x+t)dt$

1. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P et Q deux éléments de E.

$\varphi(\alpha P + Q)(x) = \displaystyle\int_0^1 (\alpha P + Q)(x+t)dt = \int_0^1 (\alpha P(x+t) + Q(x+t))dt = \alpha \int_0^1 P(x+t)dt + \int_0^1 Q(x+t)dt$

On a donc bien , $\varphi(\alpha P + Q) = \alpha\varphi(P) + \varphi(Q)$ et $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

(b) $\varphi(e_0)(x) = \displaystyle\int_0^1 e_0(x+t)dt = \int_0^1 1dt = 1$

$\varphi(e_1)(x) = \displaystyle\int_0^1 e_1(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)dt = \int_0^1 xdt + \int_0^1 tdt = \Big[x.t\Big]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = x + \frac{1}{2}$

$\varphi(e_2)(x) = \displaystyle\int_0^1 e_2(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)^2 dt = \int_0^1 x^2 + 2xt + t^2 dt = \left[x^2.t + x.t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = x^2 + x + \frac{1}{3}$

Par conséquent : $\boxed{\varphi(e_0) = e_0,\ \varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1 \text{ et } \varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2\ .}$

(c) Montrons que φ est à valeurs dans E. Soit $P = \alpha e_0 + \beta e_1 + \gamma e_2$ un polynôme de E.
La linéarité de φ montre que $\varphi(P) = \alpha\varphi(e_0) + \beta\varphi(e_1) + \gamma\varphi(e_2)$.
Or ,comme on l'a vu au (b) :$\varphi(e_0) = e_0 \in E$, $\varphi(e_1) = \frac{1}{2}e_0 + e_1 \in E$ et $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_0 + e_1 + e_2 \in E$ et E est stable par combinaison linéaire , donc $\boxed{\varphi(P) \in E.}$
φ est linéaire et à valeurs dans E, donc φ est un endomorphisme de E.

2. (a) D'après les résultats du 1.(b), la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est triangulaire avec 3 pivots non nuls , elle est donc inversible et φ est bijectif . φ est un automorphisme de E. (endomorphisme bijectif de E).

(c) La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : ainsi, A et donc φ admet 1 comme unique valeur propre. Ainsi, $\boxed{\text{Spec}(\varphi) = \{1\}}$
Raisonnons par l'absurde : si φ était diagonalisable, puisque 1 est la seule valeur propre de φ, il existerait une matrice P inversible telle que $PAP^{-1} = I$ ce qui impliquerait $A = I$ ce qui est absurde !
Ainsi, φ n'est pas diagonalisable.

3. Les commandes `Scilab` suivantes affichent la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrer une valeur pour n:')
A=[1,1/2,1/3;0,1,1;0,0,1]
disp(A^n)
```

4. (a) Démontrons la propriété $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par récurrence :

• initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = 0$.

Un peu de rab : Pour $n = 1$, on a bien $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_1 = \frac{1}{3}$.

• hérédité : En supposant $P(n)$ vraie, calculons $A^{n+1} = A.A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient alors , $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec $u_{n+1} = u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} = u_n + \frac{1}{6}(3n + 2)$.

• conclusion : Pour tout entier naturel n , il existe un réel u_n tel que $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$,

avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n + 2)$.

(b) Puisque $u_0 = 0$,on a $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_1 - u_0) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_{k+1} - u_k)$.

Or $(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{6}(3k + 2)$,

donc $u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{6}(3k+2) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=n-1}(3k) + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=n-1} 2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n-1} k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{k=n-1} 1.$

Et pour finir : $u_n = \frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n}{3} = n\left(\frac{1}{3} + \frac{n-1}{4}\right) = \frac{n(3n+1)}{12}$.

(c) Pour tout entier naturel n : $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & \frac{n(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Exercice 3. : edhec 2016

1. Le cours donne ces fonctions de répartition :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{x+3}{4} & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

2. (a) On applique les probabilités totales avec le système complet annoncé et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(X \leqslant) = \big[(X \leqslant x) \cap (Z = 1)\big] \cup \big[(X \leqslant x) \cap (Z = -1)\big] = \big[(U \leqslant x) \cap (Z = 1)\big] \cup \big[(V \leqslant x) \cap (Z = -1)\big]$$

et par incompatibilité de la réunion et indépendance de U et Z d'une part, de V et Z d'autre part :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = P(Z=1)P(U \leqslant x) + P(Z=-1)P(V \leqslant x) = pF_U(x) + (1-p)F_V(x)$$

(b) Selon la valeur de Z, X est égal à U donc prend ses valeurs dans $[-3;1]$, ou à V donc prend ses valeurs dans $[-1;3]$. On en déduit que X prend ses valeurs dans la réunion de ces deux ensembles donc

$$Z(\Omega) = [-3;3].$$

On en déduit que $F_X(x)$ est nul pour $x < -3$ et vaut 1 pour $x > 3$, puis on traite chaque intervalle demandé :

- si $-3 \leqslant x \leqslant -1$, $F_U(x) = \frac{x+3}{4}$ et $F_V(x) = 0$ donc

$$F_X(x) = p\frac{x+3}{4}.$$

- si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $F_U(x) = \frac{x+3}{4}$ et $F_V(x) = \frac{x+1}{4}$ donc

$$F_X(x) = p\frac{x+3}{4} + (1-p)\frac{x+1}{4}.$$

- si $1 \leqslant x \leqslant 3$, $F_U(x) = 1$ et $F_V(x) = \frac{x+1}{4}$ donc

$$F_X(x) = p + (1-p)\frac{x+1}{4}.$$

(c) En dérivant F_X sauf en -3, -1, 1 et 3, valeurs arbitraires, une densité de X est alors donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ p/4 & \text{si } -3 \leqslant x < -1 \\ 1/4 & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ (1-p)/4 & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

(d) On considère l'intégrale, qu'on décompose par relation de Chasles et linéarité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-3} 0\, dx + \frac{p}{4}\int_{-3}^{-1} x\, dx + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x\, dx + \frac{1-p}{4}\int_{1}^{3} x\, dx + \int_{3}^{+\infty} 0\, dx$$

Les deux intégrales de la fonction nulle convergent absolument et valent 0, les autres intégrales ne sont pas généralisées donc convergent absolument. Finalement X admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{p}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3} = \frac{p}{4}\times\frac{1-9}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{1-1}{2} + \frac{1-p}{4}\times\frac{9-1}{2} \\ &= \frac{-8p+8(1-p)}{8} = 1-2p. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons conjuguées au théorème de transfert, X admet un moment d'ordre deux et donc une variance, puis

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{p}{4}\int_{-3}^{-1} x^2\,dx + \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x^2\,dx + \frac{1-p}{4}\int_{1}^{3} x^2\,dx = \frac{p}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{-1} + \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1-p}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{3} \\ &= \frac{p}{4}\times\frac{-1+27}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{1+1}{3} + \frac{1-p}{4}\times\frac{27-1}{3} = \frac{26p+2+26(1-p)}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Enfin par formule de Koenig-Huyghens on obtient :

$$V(X) = \frac{7}{3} - (1-2p)^2.$$

3. (a) Z prend les valeurs 1 et -1, on fait deux cas :
   - si $Z=1$, alors $X=U$ et on a :
   $$U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2} = U\frac{1+1}{2} + V\frac{1-1}{2} = U = X$$
   - si $Z=-1$, alors $X=V$ et on a :
   $$U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2} = U\frac{1-1}{2} + V\frac{1+1}{2} = V = X$$

   donc dans tous les cas on a bien :
   $$X = U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}$$

   (b) La linéarité de l'espérance d'une part et l'indépendance de U, V et Z qui donne par lemme des coalitions celle de U et $\frac{1+Z}{2}$ d'une part, et de V et $\frac{1-Z}{2}$ d'autre part, X admet bien une espérance et :
   $$E(X) = E(U)\frac{1+E(Z)}{2} + E(V)\frac{1-E(Z)}{2}$$
   Or le cours pour les deux premières et un calcul immédiate pour la troisième donnent
   $$E(U) = -1 \quad , \quad E(V) = 1 \quad , \quad E(Z) = p-(1-p) = 2p-1$$
   donc
   $$E(X) = -\frac{2p}{2} + \frac{2-2p}{2} = -p+1-p = 1-2p$$
   qui confirme bien le résultat de 2d.

   (c) On calcule X^2 en fonction de U, V et Z et leurs carrés :
   $$\begin{aligned} X^2 &= \left(U\frac{1+Z}{2} + V\frac{1-Z}{2}\right)^2 = U^2\frac{(1+Z)^2}{4} + V^2\frac{(1-Z)^2}{4} + 2UV\frac{(1+Z)(1-Z)}{4} \\ &= U^2\frac{1+Z^2+2Z}{+} V^2\frac{1+Z^2-2Z}{+} UV\frac{1-Z^2}{2} \end{aligned}$$

   Or on remarque que $Z^2=1$ puisque Z ne prend que les valeurs -1 et 1, donc son carré vaut toujours 1. On obtient donc :
   $$X^2 = U^2\frac{2+2Z}{4} + V^2\frac{2-2Z}{4} + 0 = \frac{U^2(1+Z)+V^2(1-Z)}{2}$$

La linéarité de l'espérance et l'indépendance, toujours par coalitions, de U^2 et $1+Z$ d'une part, et de V^2 et $1-Z$ d'autre part, donnent l'existence du moment d'ordre deux de X et :

$$E(X^2) = \frac{E(U^2)(1+E(Z)) + E(V^2)(1-E(Z))}{2}$$

La formule de Koenig-Huyghens permet d'obtenir :

$$E(U^2) = V(U) + [E(U)]^2 = \frac{(3+1)^2}{12} + (-1)^2 = \frac{4}{12} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

et de même $E(V^2) = \frac{7}{3}$ et on obtient enfin :

$$E(X^2) = \frac{\frac{7}{3}\big(1+E(Z)+1-E(Z)\big)}{2} = \frac{7}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{7}{3}.$$

qui confirme à nouveau le résultat de 2d.

4. (a) $T(\Omega) = \{0;1\}$ donc $(2T-1)(\Omega) = \{2\times 0 - 1; 2\times 1 - 1\} = \{-1;1\}$ puis on transforme les événements :

$$(2T-1=-1) = (2T=0) = (T=0) \quad , \quad (2T-1=1) = (2T=2) = (T=1)$$

donc

$$P(2T-1=-1) = P(T=0) = 1-p \quad , \quad P(2T-1=1) = P(T=1) = p$$

et $(2T-1)$ suit la même loi que Z.

(b) On en déduit que le programme suivant simule U, V, Z et X :

```
U=grand(1,1,'unf',-3,1)
V=grand(1,1,'unf,-1,3)
Z=2*grand(1,1,'bin',1,p)-1
X=U*(1+Z)/2+V*(1-Z)/2
```

Remarque : la dernière ligne, qui utilise 3a, peut être remplacée par la définition conditionnelle de X :

```
if (Z=1) then X=U
         else X=V
end
```

Problème :[: edhec 2016]

Partie I.

1. (a) Comme $t \neq 1$, la formule de la somme géométrique s'applique et donne :

$$\forall t \in [0;x],\ \sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

(b) On intègre cette égalité entre 0 et x, et on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{p=1}^{n} \left(\int_0^x t^{p-1}\ dt \right) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\ dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt.$$

On calcule alors les intégrales à l'intérieur de la somme et la première du second membre :

$$\int_0^x t^{p-1}\ dt = \left[\frac{t^p}{p}\right]_0^x = \frac{x^p}{p}$$

et

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\ dt = -\int_0^x \frac{-1}{1-t}\ dt = -\Big[\ln(|1-t|)\Big]_0^x = -\big(\ln(1-x) - \ln 1\big) = -\ln(1-x)$$

et on obtient bien :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt.$$

(c) Pour $t \in [0;x]$ on a successivement les inégalités suivantes (avec l'inverse strictement décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une part et $t^n \geqslant 0$ d'autre part) :

$$0 \leqslant t \leqslant x\ ,\ -x \leqslant -t \leqslant 0\ ,\ 1-x \leqslant 1-t \leqslant 1\ ,\ 1 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}\ , t^n \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}$$

On peut remarquer pour simplifier la suite que $\frac{t^n}{1-t} \geqslant 0$ et on intègre avec des bornes dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\ dt = \frac{x^n}{(n+1)(1-x)}$$

Le membre de droite tend vers 0 par quotient, avec x^n qui tend vers 0 car $|x|<1$, et $(n+1)(1-x)$ qui tend vers $+\infty$, et on en déduit par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt = 0.$$

(d) On fait tendre n vers $+\infty$ dans la question 1b, en remplaçant l'indice muet p par k :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\ dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-x) - 0 = -\ln(1-x)$$

donc la série de terme général x^k/k converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

2. Question difficile. On montre cette relation par récurrence sur $q \geqslant m$:

- Pour $q=m$, la somme vaut $\sum\limits_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{m}{m} = 1$ et $\binom{m+1}{m+1} = 1$ donc la propriété est vérifiée au rang $q=m$.
- On suppose que la propriété est vraie au rang $q \geqslant m$, alors

$$\sum_{k=m}^{q+1} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} + \binom{q+1}{m} = \binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} = \binom{q+2}{m+1}$$

avec la dernière égalité donnée par la formule du triangle de Pascal, qu'on peut reprouver si on ne la connaît pas par coeur :

$$\begin{aligned}
\binom{q+1}{m+1} + \binom{q+1}{m} &= \frac{(q+1)!}{(m+1)!(q+1-m-1)!} + \frac{(q+1)!}{m!(q+1-m)!} \\
&= \frac{(q+1)!}{(m+1)!(q-m)!} + \frac{(q+1)!}{m!(q+1-m)!} = \frac{(q+1)!(q+1-m)+(q+1)!(m+1)}{(m+1)!(q+1-m)!} \\
&= \frac{(q+1)!(q+2)}{(m+1)!(q+2-m-1)!} = \frac{(q+2)!}{(m+1)!(q+2-m-1)!} = \binom{q+2}{m+1}
\end{aligned}$$

3. (a) S_n est la somme de n variables prenant leurs valeurs dans $[\![1;+\infty[\![$, on a donc $S_n(\Omega) = [\![n;+\infty[\![$.

Avec le système complet d'événements $(S_n = j)_{k\geqslant n}$, la formule des probabilités totales donne, pour tout $k \geqslant n+1$:

$$(S_{n+1}=k) = \bigcup_{j=n}^{+\infty} (S_n=j)\cap(S_{n+1}=k) = \bigcup_{j=n}^{+\infty} (S_n=j)\cap(S_n+X_{n+1}=k) = \bigcup_{j=n}^{+\infty} (S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j)$$

On remarque alors que $X_{n+1} = k-j$ est impossible pour $k-j \leqslant 0$, donc pour $j \geqslant k$, et la réunion s'arrête donc à $k-1$ pour donner :

$$(S_{n+1}=k) = \bigcup_{j=n}^{k-1} (S_n=j) \cap (X_{n+1}=k-j)$$

puis par incompatibilité de la réunion :

$$P(S_{n+1}=k) = \sum_{j=n}^{k-1} P\Big((S_n=j)\cap(X_{n+1}=k-j)\Big)$$

(b) Les X_i étant indépendantes, par lemme des coalitions, X_{n+1} et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sont indépendantes donc pour tout $k \geqslant n+1$:

$$P(S_{n+1}=k) = \sum_{j=n}^{k-1} P(S_n=j)P(X_{n+1}=k-j) = \sum_{j=n}^{k-1} P(S_n=j)(1-x)^{k-j-1}x$$

Montrons alors par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété P_n : " $\forall k \in [\![n;+\infty[\![,\ P(S_n=k) = \binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}$:

- Pour $n=1$, $S_1 = X_1$ qui suit la loi géométrique de paramètre x, donc on a bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(S_1=k) = (1-x)^{k-1}x = \binom{k-1}{0}x^1(1-x)^{k-1}$$

puisque $\binom{k-1}{0} = 1$, et la propriété est vraie au rang $n=1$.

- On suppose la propriété vérifiée au rang $n \geqslant 1$, alors pour tout $k \geqslant n+1$, le début de la question permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1}=k) &= \sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}x^n(1-x)^{j-n}(1-x)^{k-j-1}x = \sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}x^{n+1}(1-x)^{k-n-1} \\ &= x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)}\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1} \end{aligned}$$

Calculons cette somme en faisant apparaître le résultat de la question 2 : avec le changement d'indice $i = j-1$ on a :

$$\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1} = \sum_{i=n-1}^{k-2}\binom{i}{n-1} = \binom{k-2+1}{n-1+1} = \binom{k-1}{n}$$

et on obtient finalement : pour tout $k \geqslant n+1$,

$$P(S_{n+1}=k) = \binom{k-1}{n}x^{n+1}(1-x)^{k-(n+1)}$$

et la propriété est vérifiée au rang $k+1$.

- En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n est bien donnée par :

$$\forall k \in [\![n;+\infty[\![,\ P(S_n=k) = \binom{k-1}{n-1}x^n(1-x)^{k-n}$$

(c) $(S_n=k)_{k\in[\![n;+\infty[\![}$ est un système complet d'événements donc :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} P(S_n=k) = x^n\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n} = 1.$$

En divisant par $x^n \neq 0$ on obtient bien :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}.$$

(d) Il faut sommer n variables indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p donc il faut entrer la commande :

```
S=sum(grand(1,n,'geom',p))
```

Partie II.

1. (a) Comme $p \in]0;1[$, son logarithme est strictement négatif. Avec $q^k \geqslant 0$ et $k > 0$, on obtient bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = -\frac{q^k}{k\ln p} \geqslant 0$$

(b) A l'aide de la question 1d, appliquée avec $q \in [0;1[$, on peut affirmer que cette série converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k} = -\frac{1}{\ln p} \times \big(-\ln(1-q)\big) = \frac{\ln p}{\ln p} = 1$$

2. (a) On considère la série de terme général $kP(X=k)$, dont on remarque qu'elle est géométrique de raison q avec $|q|$, donc elle converge absolument. On en déduit que X admet une espérance et :

$$E(X) = -\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = -\frac{1}{\ln p} \times q \times \frac{1}{1-q} = -\frac{q}{p\ln p}$$

(b) De même la série de terme général $k^2P(X=k)$ converge absolument comme série géométrique dérivée avec $|q|<1$, donc X admet un moment d'ordre deux et donc une variance, avec :

$$E(X^2) = -\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = -\frac{q}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = -\frac{q}{\ln p} \times \frac{1}{(1-q)^2} = -\frac{q}{p^2\ln p}$$

puis par Koenig-Huyghens :

$$V(X) = -\frac{q}{p^2\ln p} - \frac{q^2}{p^2(\ln p)^2} = -\frac{q\ln p + q^2}{p^2(\ln p)^2} = -\frac{q(q+\ln p)}{p^2(\ln p)^2}$$

3. (a) Lorsque $X=k$, Y peut prendre toutes les valeurs de $[\![0;k]\!]$. De plus k prend toutes les valeurs de 1 à $+\infty$ donc en réunissant les possibilités on obtient bien :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

Par formule de probabilités totales avec le système complet $(X=k)_{k\geqslant 1}$ on obtient alors :

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=0) = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{q^k}{k\ln p} \times q^k = -\frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(q^2)^k}{k}$$

et enfin la question 1d de la partie I donne :

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= -\frac{1}{\ln p} \times \big(\ln(1-q^2)\big) = -\frac{1}{\ln p} \times \big(-\ln([1-q][1+q])\big) = \frac{1}{\ln p} \times \big(\ln p + \ln(1+q)\big) \\ &= \frac{\ln p + \ln(1+q)}{\ln p} = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln p} \end{aligned}$$

(b) Commençons par établir la formule demandée :

$$\frac{\binom{k}{n}}{k} = \frac{k!}{kn!(k-n)!} = \frac{(k-1)!}{n!(k-n)!} \quad \text{et} \quad \frac{\binom{k-1}{n-1}}{n} = \frac{(k-1)!}{n(n-1)!(k-1-n+1)!} = \frac{(k-1)!}{n!(k-n)!}$$

donc les deux sont bien égaux.

On applique alors la formule de probabilités totales avec le système complet $(X=k)_{k\geqslant 1}$:

$$P(Y=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=n)$$

On remarque que $Y=n$ n'est possible que si $k \geqslant n$ donc les termes de 1 à $n-1$ sont nuls et :

$$\begin{aligned} P(Y=n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=n) = -\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{q^k}{k\ln p} \times \binom{k}{n} p^n q^{k-n} = -\frac{p^n}{\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\binom{k}{n}}{k} \times q^{2k-n} \\ &= -\frac{p^n}{\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\binom{k-1}{n-1}}{n} \times q^{2k-n} \end{aligned}$$

Enfin on fait apparaître q^n à l'extérieur de la somme et pour compenser q^{-n} à l'intérieur et on obtient :

$$P(Y=n) = -\frac{p^n q^n}{n\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}\times q^{2k-2n} = -\frac{p^n q^n}{n\ln p}\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}\times (q^2)^{k-n}$$

En appliquant comme indiqué la question 3c de la partie I avec $x = 1-q^2$ qui donne bien $1-x=q^2$ on obtient :

$$P(Y=n) = -\frac{p^n q^n}{n\ln p}\times\frac{1}{(1-q^2)^n} = -\frac{p^n q^n}{n\ln p[(1-q)(1+q)^n]} = -\frac{p^n q^n}{n\ln p p^n(1+q)^n} = -\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln p}$$

(c) On calcule cette série en faisant attention de séparer le terme $k=0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k) = 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p} - \frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{q}{1+q}\right)^k}{k}$$

et on applique une fois de plus la question 1d de la partie I avec $\frac{q}{1+q}\in[0;1[$ (car positif par quotient de facteurs positifs, et strictement inférieur à 1 avec $q<1+q$) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=k) &= 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p} - \frac{1}{\ln p}\times\left(-\ln\left(1-\frac{q}{1+q}\right)\right) = 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p}+\frac{1}{\ln p}\ln\left(\frac{1}{1+q}\right)\\ &= 1+\frac{\ln(1+q)}{\ln p}-\frac{1}{\ln p}\ln(1+q) = 1\end{aligned}$$

(d) On reconnaît une série géométrique avec $\left|\frac{q}{1+q}\right|<1$ donc qui converge absolument. Y admet donc une espérance et :

$$E(Y) = 0P(X=0) - \frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{q}{1+q}\right)^k = -\frac{1}{\ln p}\times\frac{q}{1+q}\times\frac{1}{1-\frac{q}{1+q}} = -\frac{1}{\ln p}\times\frac{q}{1+q}\times\frac{1}{\frac{1}{1+q}} = -\frac{q}{\ln p}$$

En reconnaissant cette fois une série géométrique dérivée de même paramètre que précédemment, Y admet un moment d'ordre deux et :

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= 0^2P(X=0) - \frac{1}{\ln p}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{q}{1+q}\right)^k = -\frac{1}{\ln p}\times\frac{q}{1+q}\times\frac{1}{\left(1-\frac{q}{1+q}\right)^2}\\ &= -\frac{1}{\ln p}\times\frac{q}{1+q}\times\frac{1}{\frac{1}{(1+q)^2}} = -\frac{q(1+q)}{\ln p}\end{aligned}$$

Enfin Y admet bien une variance et

$$V(Y) = -\frac{q(1+q)}{\ln p} - \frac{q^2}{(\ln p)^2} = -\frac{q(1+q)\ln p + q^2}{(\ln p)^2} = -\frac{q(q+(1+q)\ln p)}{(\ln p)^2}$$