Concours Blanc 2 : EML

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
L'utilisation de documents, d'une calculatrice ou de tout appareil électronique est strictement interdite.
Les abréviations sont interdites. Les notions doivent être écrites en toutes lettres .
Toute abréviation et toute phrase écrite au crayon à papier ne seront pas lues par le correcteur.

Exercice 1.
On désigne par $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.
3. Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.

II - Un exemple

Dans cette partie et uniquement cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
2. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base $\mathscr{B}$ est :
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
3. Préciser les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de l'endomorphisme φ_A.
4. L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ?

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

On désigne par $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes.

1. Soit un réel λ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant :
$$\varphi_A(M) = \lambda M.$$
Montrer par un raisonnement par l'absurde que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
2. Soit un réel μ tel qu'il existe une matrice $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \mu X$.
On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.
Montrer que N et N' sont des vecteurs propres de l'endomorphisme φ_A associés à la valeur propre μ.
3. Comparer le spectre de l'endomorphisme φ_A et le spectre de la matrice A.
4. Montrer que si la matrice A est diagonalisable, alors l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

Exercice 2.
Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0;+\infty$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

1. **Partie I : Etude de la fonction f**
   (a) Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
   (c) Montrer : $b \in [2;4]$. On note $\ln(2) \simeq 0,7$.
2. **Partie II : Etude d'une suite**
   On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
   (c) i. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b)$.
   ii. En déduire : $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
   (d) i. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbf{N}$, renvoie la valeur de u_n.
   ii. Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1. function b = valeur_approchee(epsilon)
2.        n = 0
3.        while ........
4.                n = n+1
5.        end
6.        b = suite(n)
7. endfunction
```

3. **Partie III : Etude d'une fonction définie par une intégrale**
   On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt.$$

   (a) Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

   (b) En déduire les variations de Φ sur $]0;+\infty[$.
   (c) Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[$, $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x$.
   (d) i. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.
   ii. Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
   On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
   (e) On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.
   Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Exercice 3.
Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

I. Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ème} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. (a) Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
   (b) i. Compléter le programme suivant qui effectue 1000 simulations de la variable X et enregistre les 1000 modalités obtenues dans un vecteur `s` de taille 1×1000 :
   ```
   n=input('Entrer le nombre n de tirages : ')
   s= grand(1,1000,****,****,****)
   ```
   ii. Rajouter une instruction à la suite qui affiche une valeur approchée de l'espérance de X obtenue grâce à ces 1000 simulations.
2. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'évènement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$
4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$
5. En déduire $E(Y)$.

II. Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n - 1$.
   (a) Déterminer $P_{(Z_p = k)}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   (b) Montrer que :
$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$
   (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence forte sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

7. **Informatique :** Compléter le programme suivant qui, étant donné c, effectue une simulation des 10 variables : X_1, X_2 , ..., X_{10}, les mémorise dans un vecteur ligne nommé `X`, et affiche les valeurs obtenues :
`n` *désigne le nombre de boules noires et* `b` *le nombre de boules blanches.*

```
c=input('entrer la valeur de c')
X=zeros(1,10)

n=1
b=1
for i=1:10 do
    if rand() < b/(b+n) then
        X(i)=****
        n=****
        b=****
    else
        X(i)=****
        n=****
        b=****
    end
end
disp(X)
```