CB 2 : EML correction

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
L'utilisation de documents, d'une calculatrice ou de tout appareil électronique est strictement interdite.
Les abréviations sont interdites. Les notions doivent être écrites en toutes lettres .
Toute abréviation et toute phrase écrite au crayon à papier ne seront pas lues par le correcteur.

Exercice 1.

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A.

1. Montrons que φ_A est linéaire : soient M_1 et M_2 dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :
$$\varphi_A(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda\varphi_A(M_1) + \varphi_A(M_2)$$
donc φ_A est linéaire. De plus comme $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, donc pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, leur produit $\varphi_A(M) = AM$ est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, et enfin φ_A va bien de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ dans lui-même : c'est un endomorphisme.

2. Si φ_A est bijectif, par définition de la bijectivité, pour tout élément de l'espace d'arrivée, il existe un unique antécédent par φ_A dans l'espace de départ.

   Or I_2 est un élément de l'espace d'arrivée $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, donc il existe un unique $N \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ (espace de départ) tel que :
$$\varphi_A(N) = I_2 \Longleftrightarrow AN = I_2.$$

3. On suppose que φ_A est un automorphisme, c'est donc une application bijective, alors d'après la question précédente il existe N tel que $AN = I_2$: par définition A est alors inversible et N est son inverse.

   Réciproquement, si A est inversible, on cherche l'injectivité de φ_A :
$$\varphi_A(M) = 0 \Longleftrightarrow AM = 0 \Longleftrightarrow A^{-1}AM = A^{-1}0 \Longleftrightarrow M = 0$$
donc $\ker(\varphi_A) = \{0\}$ et φ_A est injective. De plus φ_A est un endomorphisme, donc d'après le théorème du rang :
$$\dim(\operatorname{Im}\varphi_A) = 4 - \dim(\ker\varphi_A) = 4 - 0 = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbf{R}))$$
donc φ_A est surjective, donc elle est bijective, et c'est un endomorphisme donc un automorphisme.

   On a donc montré l'équivalence des deux propositions : φ_A est bijective si et seulement si A est inversible.

II - Un exemple.

1. A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses valeurs diagonales :
$$\mathrm{Sp}(A) = \{-1; 1\}$$
Elle admet donc 2 valeurs propres et c'est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, elle est diagonalisable.

2. On calcule :
$$\varphi_A(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} \quad , \quad \varphi_A(E_{12}) = AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12},$$
$$\varphi_A(E_{21}) = AE_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{11} - E_{21} \quad , \quad \varphi_A(E_{22}) = AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2E_{12} - E_{22}.$$
On en déduit bien que :
$$Mat_{\mathscr{B}}(\varphi_A) = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. T est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses valeurs diagonales :

$$\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(\varphi_A) = \{-1; 1\}.$$

On cherche alors les sous-espaces propres de T : avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$,

$$(T+I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2z = 0 \\ 2y + 2t = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = -t \end{array} \right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$E_{-1}(T) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{et donc} \quad E_{-1}(\varphi_A) = \mathrm{Vect}(E_{21} - E_{11}, E_{22} - E_{12}) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

La famille $\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$ est génératrice de $E_{-1}(\varphi_A)$ et libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $E_{-1}(\varphi_A)$.

De même,

$$(T-I)X = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} 2z = 0 \\ 2t = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ t = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$E_1(T) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \text{et donc} \quad E_1(\varphi_A) = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{12}) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

La famille $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ est génératrice de $E_1(\varphi_A)$ et libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc une base de $E_1(\varphi_A)$.

4. La somme des dimensions des sous-espaces propres de φ_A vaut 4, et $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbf{R})) = 4$, donc φ_A est diagonalisable.

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A.

1. On sait que $M \neq 0$ et $\varphi_A(M) = AM = \lambda M$. On suppose que $A - \lambda I$ est inversible, alors :

$$AM = \lambda M \quad \text{donc} \quad (A-\lambda I)M = 0 \quad \text{et enfin} \quad (A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)M = M = (A-\lambda I)^{-1}0 = 0$$

et enfin $M = 0$, ce qui est absurde. On en déduit que $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

2. On sait que $AX = \mu X$, donc :

$$\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu y \end{pmatrix}$$

et on en déduit que

$$\varphi_A(N) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & 0 \\ cx+dy & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x & 0 \\ \mu y & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \mu N$$

De plus X est non nul, donc x ou y est non nul, et la matrice N est forcément non nulle : c'est bien un vecteur propre associé à la valeur propre μ de φ_A. De même $N' \neq 0$ et :

$$\varphi_A(N') = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax+by \\ 0 & cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu x \\ 0 & \mu y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \mu N'$$

donc N' est un vecteur propre de φ_a associé à la valeur propre μ.

3. La question 1 montre que si λ est une valeur propre de φ_A, c'est aussi une valeur propre de A donc

$$\mathrm{Sp}(\varphi_A) \subset \mathrm{Sp}(A).$$

La question 2 montre que si μ est une valeur propre de A, c'est aussi une valeur propre de φ_A donc

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(\varphi_A) \quad \text{et donc} \quad \mathrm{Sp}(\varphi_A) = \mathrm{Sp}(A).$$

4. A est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, donc si elle est diagonalisable, elle peut avoir une valeur propre avec un sous-espace associé de dimension 2, ou bien deux valeurs propres avec des sous-espaces propres associés chacun de dimension 1.

   - Si A a une seule valeur propre avec μ sa valeur propre, alors il existe P inversible tel que

   $$A = P\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1} = P(\mu I)P^{-1} = \mu P I P^{-1} = \mu I$$

   et on remarque que la base canonique est une base de vecteurs propres de A. D'après la question 2, les matrices suivantes sont vecteurs propres de φ_A :

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} E_{11} \ , \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21} \ , \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} \ , \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{22}$$

   On reconnaît les quatre vecteurs de la base $\mathscr{B}$, donc il existe une base de vecteurs propres de φ_a, et celle-ci est donc diagonalisable.

   - Si A a deux valeurs propres distinctes μ_1 et μ_2, la question 2 donne deux vecteurs propres de φ_A associées à la valeur propre μ_1, clairement non colinéaires donc ils forment une famille libre de $E_{\mu_1}(\varphi_A)$.

   On obtient de même une famille libre de deux vecteurs de $E_{\mu_2}(\varphi_A)$, et par concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, on obtient une famille libre de quatre vecteurs propres de φ_A. Cette famille a de plus son cardinal égal à $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, c'est en donc une base.

   On a obtenu une base de vecteurs propres de φ_A, et φ_A est donc diagonalisable.

Finalement, dans tous les cas, si A est diagonalisable, φ_A l'est aussi.

Exercice 2. :eml 2018

Partie I : Étude de la fonction f

1. La fonction $x \mapsto x$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = +\infty$$

et, par croissances comparées, $f(x) \underset{x:+\infty}{\sim} x$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur $]0,1[$, la fonction f est continue, strictement décroissante et ses limites aux bornes sont $+\infty$ et 1. Il suit du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]0,1[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 2$.

De même, sur $]1,+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et limites aux bornes sont 1 et $+\infty$. Il suit à nouveau du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]1,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $b \in]1,+\infty[$ tel que $f(b) = 2$.

Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$ et donc :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 2 \text{ n'admet que deux solutions sur }]0,+\infty[: a \in]0,1[\text{ et } b \in]1,+\infty[.}$$

3. On a

$$f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 < 2,$$
$$f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 > 2.$$

La fonction f étant continue sur $[2;4]$, il suit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x \in [2,4]$ tel que $f(x) = 2$. Par unicité de la solution à cette équation sur $]1,+\infty[$, on a $x = b$ et donc :

$$\boxed{b \in [2;4].}$$

Partie II : Étude d'une suite

4. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.

<u>Initialisation :</u> Si $n = 0$, on a $u_0 = 4$ de sorte que u_0 est bien défini et $u_0 = 4 \geqslant b$ d'après **3**.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \geqslant b$. Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien défini. En outre, par croissance du logarithme, $\ln(u_n) \geqslant \ln(b) = b - 2$, la dernière égalité provenant du fait que $2 = f(b) = b - \ln(b)$. Ainsi, $u_{n+1} \geqslant b - 2 + 2 = b$ et donc $u_{n+1} \in [b,+\infty[$.

En conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geqslant b.}$$

5. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - (u_n - \ln(u_n)) \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$

Mais $u_n \geqslant b$ d'après **4** et f est croissante sur $[b, +\infty[\subset [1, +\infty[$ d'après **1**. Ainsi, $f(u_n) \geqslant f(b) = 2$ et donc

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 2 - 2 = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est décroissante.}}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant minorée par b d'après **4**, elle converge vers une limite $\ell \geqslant b$.
En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ et en utilisant la continuité du logarithme, il vient

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

ou encore

$$f(\ell) = 2.$$

Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$, on a $\ell = b$.
En conclusion,

$$\boxed{u_n \to b.}$$

6. **a.** Considérons la fonction g définie sur $[b, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2$. C'est une fonction dérivable et, pour tout $x \geqslant b$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alors, puisque $b \geqslant 2$, on a :

$$\forall x \geqslant b, \quad |g'(x)| = \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{2}.$$

En outre, $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.
La suite (u_n) convergeant vers b en décroissant, il suit de l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &= |u_{n+1} - b| \\ &= |g(u_n) - g(b)| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|u_n - b| \\ &= \frac{1}{2}(u_n - b). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

b. La suite (u_n) convergeant en décroissant vers b, on a déjà

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant u_n - b.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, puisque $b \in [2; 4]$ d'après **3**, il vient

$$u_0 - b = 4 - b \leqslant 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{0-1}}.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Alors, il suit de **6.a** que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &\leqslant \frac{1}{2}(u_n - b) \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

7. **a.** Nous proposons la fonction suivante :

```
function u = suite(n)
        u = 4
        for i=1:n
                u = log(u)+2
        end
endfunction
```

b. Nous nous appuyons ici sur la question **6.b** :

```
function b = valeur_approchee(epsilon)
        n = 0
        while (1/2^(n-1) > epsilon)
                n = n+1
        end
        b = suite(n)
endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

8. La fonction $t \mapsto f(t)$ est continue et ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, elle y admet donc une primitive que l'on note G. On a alors :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi(x) = G(2x) - G(x).$$

Il s'ensuit que Φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\ &= \frac{2}{(2x - \ln(2x))} - \frac{1}{(x - \ln(x))} \\ &= \frac{2(x - \ln(x)) - (2x - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{2x - 2\ln(x) - 2x + \ln(2x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}.}$$

9. Soit $x \in]0, +\infty[$. On a

$$x - \ln(x) = f(x) > 0 \quad \text{et} \quad 2x - \ln(2x) = f(2x) > 0$$

donc $\Phi'(x)$ est du signe de $\ln(2) - \ln(x)$, d'où le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Φ		$\nearrow$		$\searrow$	

10. Pour tout $t > 0$, il suit de **1** que $f(t) \geqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{f(t)} \leqslant 1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \leqslant \int_x^{2x} 1\, dt = (2x - x) = x.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant x.}$$

11. **a.** En appliquant le théorème d'encadrement à l'inégalité trouvée en **10**, on obtient

$$\lim_{x \to 0^+} \Phi(x) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Phi \text{ est prolongeable par continuité en } 0, \text{ avec } \Phi(0) = 0.}$$

b. Soit $x > 0$. On a

$$\Phi'(x) \underset{x:0^+}{\sim} \frac{-\ln(x)}{(-\ln(x))(-\ln(2x))} = -\frac{1}{\ln(2x)} \xrightarrow[x:0^+]{} 0.$$

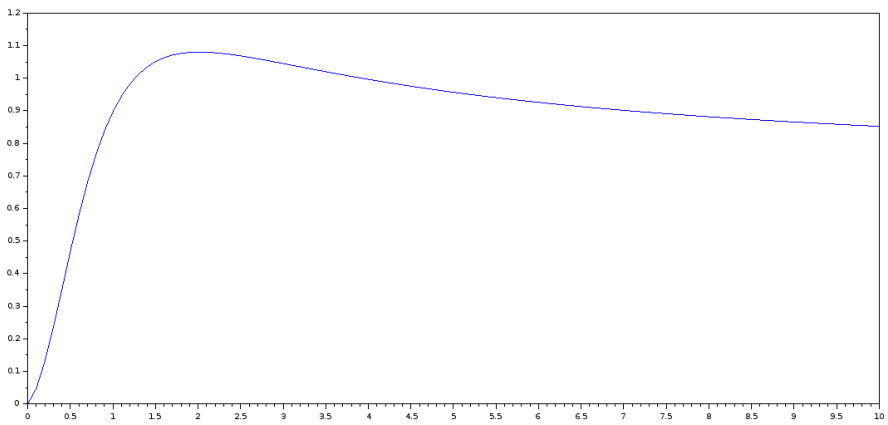
Ainsi,

$$\boxed{\Phi'(x) \xrightarrow[x:0^+]{} 0.}$$

12. On commence par observer que l'on a les éléments caractéristiques suivants :

- Une asymptote horizontale d'équation $y = \ln(2)$ en $+\infty$;
- Une tangente horizontale au point $(2, \Phi(2))$;
- Une (demi-)tangente horizontale au point $(0, \Phi(0))$.

On obtient alors un graphique ayant l'allure suivante (celui-ci ayant été réalisé numériquement avec Scilab) :



Exercice 3.

I. Étude du cas $c = 0$.

1. (a) On effectue n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ et X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!] \quad , \quad \forall k \in [\![0;n]\!], \quad \mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et X admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(X) = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}.$$

(b) i.
```
n=input('Entrer le nombre n de tirages : ')
s= grand(1,1000,'bin',n,1/2)
```
ii.
```
disp(mean(s))
```

2. Pour avoir $Y = k$ il faut que les $(k-1)$ premiers tirages aient donné une boule noire et le k-ième une boule blanche donc

$$(Y = k) = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$$

et par indépendance des tirages :

$$\mathrm{P}(Y = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}.$$

Pour avoir $Y = 0$ il faut n'avoir tiré que des boules noires donc

$$(Y = 0) = N_1 \cap \cdots \cap N_n$$

et par indépendance des tirages :

$$\mathrm{P}(Y = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

3. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, et on prend bien garde à séparer la valeur $k = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 1.$$

4. Montrons la formule par récurrence sur $n \geqslant 1$:

Initialisation : pour $n = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{1} kx^k = x$$

et

$$\frac{x^{1+2} - (1+1)x^{1+1} + x}{(1-x)^2} = \frac{x\left(x^2 - 2x + 1\right)}{(x-1)^2} = x\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = x.$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe $n \geqslant 1$ fixé tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$, alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)x^{n+1} = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} + \frac{(n+1)x^{n+1}(1 - 2x + x^2)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x + (n+1)x^{n+1} - 2(n+1)x^{n+2} + (n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} \times \left(x + x^{n+1}\left[-(n+1) + (n+1)\right] + x^{n+2}\left[n - 2n - 2\right] + (n+1)x^{n+3}\right) \\
&= \frac{(n+1)x^{(n+1)+2} - ((n+1)+1)x^{(n+1)+1} + x}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

5. Y est finie donc admet une espérance, qu'on calcule à l'aide de la formule précédente :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4\left(\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2^n} - \frac{2n+2}{2^n} + 2 \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n}. \end{aligned}$$

II. Étude du cas $c \neq 0$.

1. Z_p est le nombre de boules blanches qui ont été tirées lors des p premiers tirages.

2. $X_1(\Omega) = \{0;1\}$ et

$$(X_1 = 0) = N_1 \quad \text{et} \quad (X_1 = 1) = B_1$$

donc

$$\mathrm{P}(X_1 = 0) = \mathrm{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

X_1 suit la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$ donc admet une espérance qui vaut :

$$E(X_1) = \frac{1}{2}.$$

3. On a tout d'abord :

$$X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0;1\}$$

puis :

$$\mathrm{P}\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\right) = \mathrm{P}\left(X_1 = 1\right)\mathrm{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1+c}{2+c} = \frac{1+c}{4+2c}$$

car si $X_1 = 1$, on a tiré une boule blanche donc on a une boule noire et $(1+c)$ boule blanche pour le 2e tirage.

De même

$$\mathrm{P}\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)\right) = \mathrm{P}\left(X_1 = 1\right)\mathrm{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2+c} = \frac{1}{4+2c}.$$

$$\mathrm{P}\left((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)\right) = \mathrm{P}\left(X_1 = 0\right)\mathrm{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2+c} = \frac{1}{4+2c}.$$

$$\mathrm{P}\left((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)\right) = \mathrm{P}\left(X_1 = 0\right)\mathrm{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1+c}{2+c} = \frac{1+c}{4+2c}.$$

D'où comme $((X_1 = 1), (X_1 = 0))$ est un système complet d'évènements et par probabilité totales :

$$\mathrm{P}\left(X_2 = 1\right) = \mathrm{P}\left((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)\right) + \mathrm{P}\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\right) = \frac{1+1+2c}{4+2c} = \frac{2+2c}{2(2+2c)} = \frac{1}{2}.$$

Enfin $(X_2 = 0) = \overline{(X_2 = 1)}$ donc

$$\mathrm{P}\left(X_2 = 0\right) = \frac{1}{2}$$

et X_2 suit la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$ donc admet une espérance qui vaut :

$$E(X_2) = \frac{1}{2}.$$

4. $Z_2\left(\Omega\right) = \{0;1;2\}$ et en décomposant selon les valeurs du couple (X_1, X_2) :

$$\mathrm{P}(Z_2 = 0) = \mathrm{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = \frac{1+c}{4+2c}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z_2=1) &= \mathrm{P}\left[\Big((X_1=0)\cap(X_2=1)\Big)\cup\Big((X_1=1)\cap(X_2=0)\Big)\right] \\
&= \mathrm{P}((X_1=0)\cap(X_2=1))+\mathrm{P}((X_1=1)\cap(X_2=0)) \\
&= \frac{2}{4+2c}.
\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(Z_2=2)=\mathrm{P}((X_1=1)\cap(X_2=1))=\frac{1+c}{4+2c}.$$

5. $Z_p(\Omega)=\{0;1;2;\cdots;p\}$.

6. (a) Si $Z_p=k$, on a tiré k boules blanches donc rajouté kc boules blanches : il y en a donc $1+kc$.
Après p tirages le total de boules est de $2+pc$ (on en rajoute c à chaque tirage). D'où

$$\mathrm{P}_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)=\frac{1+kc}{2+pc}.$$

(b) Comme $[(Z_p=0),(Z_p=1),\ldots,(Z_p=n)]$ est un système complet d'évènements la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{p+1}=1) &= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(Z_p=k)\times\mathrm{P}(X_{p+1}=1|Z_p=k)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(Z_p=k)\frac{1+kc}{2+pc} \\
&= \frac{1}{2+pc}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(Z_p=k)+c\sum_{k=0}^{n}k\,\mathrm{P}(Z_p=k)\right)=\frac{1}{2+pc}\times(1+cE(Z_p))=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.
\end{aligned}$$

(c) Montrons par récurrence sur $1\leqslant p\leqslant n$ que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$:

Initialisation : on a déjà vu que X_1 et X_2 suivent la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Hérédité : supposons qu'il existe $1\leqslant p\leqslant n-1$ fixé tel que $X_1,\ X_2,\cdots,\ X_p$ suivent la loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Alors par linéarité de l'espérance

$$E(Z_p)=\sum_{i=1}^{p}E(X_i)=\frac{p}{2}$$

D'autre part on a $X_{p+1}(\Omega)=\{0;1\}$ et :

$$\mathrm{P}(X_{p+1}=1)=\frac{1+\frac{pc}{2}}{2+pc}=\frac{\frac{2+pc}{2}}{2+pc}=\frac{2+pc}{2}\times\frac{1}{2+pc}=\frac{1}{2}.$$

D'où

$$\mathrm{P}(X_{p+1}=0)=1-\mathrm{P}(X_{p+1}=1)=\frac{1}{2}$$

et X_{p+1} est une variable aléatoire de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Conclusion : pour tout $p\in\{1;2;\ldots;n\}$, X_p est une variable aléatoire de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Remarque : le jeu étant parfaitement symétrique, il est normal qu'il y ait autant de chance de tirer une boule blanche ou une boule noire au p-ième tirage pour tout p : ce résultat est donc naturel et on aurait pu l'obtenir directement en inversant le rôle des boules blanches et des boules noires pour montrer que $\mathrm{P}(X_p=1)=\mathrm{P}(X_p=0)$ puis que chacune vaut $\frac{1}{2}$.

7.
```
c=input('entrer la valeur de c')
X=zeros(1,10)

n=1
b=1
for i=1:10 do
    if rand() < b/(b+n) then
```

```
        X(i)=1
        n=n
        b=b+c
    else
        X(i)=0
        n=n+c
        b=b
    end
end
disp(X)
```