Essec I 2011 - Correction

Problème 1 - Évolution des intentions de vote

Partie I - Un cas particulier : $m = 4$

1. (a) S'il n'y a avait aucune personne voulant voter pour A, les deux personnes se rencontrant veulent toutes les deux voter pour B et il n'y a pas de changement. D'où

$$p_{0,0} = P_{(X_k=0)}(X_{k+1} = 0) = 1.$$

De même si toutes les personnes veulent voter pour A, les deux qui se rencontrent veulent voter pour A et il n'y a aucun changement, et

$$p_{4,4} = P_{(X_k=4)}(X_{k+1} = 4) = 1.$$

(b) Chaque jour une personne au maximum change d'avis donc si $X_k = i$, alors le lendemain

$$i - 1 \leqslant X_{k+1} \leqslant i + 1$$

et si $|i - j| \geqslant 2$ cette condition n'est pas vérifiée donc

$$p_{i,j} = 0.$$

(c) Si $X_k = 1$ on a :

Pour avoir $X_{k+1} = 0$ il faut que la première personne tirée veule voter pour B ; or il y en a 3 sur les 4 donc la probabilité est de $\frac{3}{4}$.
Il faut de plus que la deuxième personne tirée veule voter pour A ; or il y en a 1 sur les 3 restantes donc la probabilité est de $\frac{1}{3}$.
On obtient donc

$$p_{1,0} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

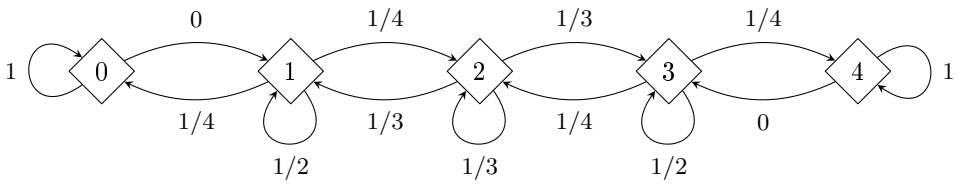
Pour avoir $X_{k+1} = 2$ il faut que la première personne tirée veule voter pour A ; or il y en a 1 sur les 4 donc la probabilité est de $\frac{1}{4}$.
Il faut de plus que la deuxième personne tirée veule voter pour B ; or il y en a 3 sur les 3 restantes donc la probabilité est de 1.
On obtient donc

$$p_{1,2} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}.$$

Enfin comme $(X_k = i)_{0 \leqslant i \leqslant 4}$ est un système complet d'évènements et $p_{1,3} = p_{1,4} = 0$ par la question précédente, on a :

$$p_{1,1} = 1 - p_{1,0} - p_{1,2} - p_{1,3} - p_{1,4} = \frac{1}{2}.$$

(d) La justification est la même que celles de la question c) à chaque fois.



2. (a) Avec le système complet d'évènement $(X_n = i)_{0\leqslant i\leqslant 4}$, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1}=1) &= \sum_{i=0}^{4} \mathrm{P}(X_n=i)\,\mathrm{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1}=1) = 0 + p_{1,1}\,\mathrm{P}(X_n=1) + p_{2,1}\,\mathrm{P}(X_n=2)\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(X_n=1) + \frac{1}{3}\,\mathrm{P}(X_n=2).
\end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1}=2) &= \sum_{i=0}^{4} \mathrm{P}(X_n=i)\,\mathrm{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1}=2) = 0 + p_{1,2}\,\mathrm{P}(X_n=1) + p_{2,2}\,\mathrm{P}(X_n=2) + p_{3,2}\,\mathrm{P}(X_n=3)\\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{P}(X_n=1) + \frac{1}{3}\,\mathrm{P}(X_n=2) + \frac{1}{4}\,\mathrm{P}(X_n=4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1}=3) &= \sum_{i=0}^{4} \mathrm{P}(X_n=i)\,\mathrm{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1}=3) = 0 + p_{2,3}\,\mathrm{P}(X_n=2) + p_{3,3}\,\mathrm{P}(X_n=3)\\
&= \frac{1}{3}\,\mathrm{P}(X_n=2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(X_n=3).
\end{aligned}$$

Le produit MU_n donne alors :

$$MU_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(X_n=1) + \frac{1}{3}\,\mathrm{P}(X_n=2) \\ \frac{1}{4}\,\mathrm{P}(X_n=1) + \frac{1}{3}\,\mathrm{P}(X_n=2) + \frac{1}{4}\,\mathrm{P}(X_n=4) \\ \frac{1}{3}\,\mathrm{P}(X_n=2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(X_n=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_{n+1}=1) \\ \mathrm{P}(X_{n+1}=2) \\ \mathrm{P}(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

On prouve alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = M^n U_0$:

- **Initialisation** : pour $n = 0$,
$$M^0 U_0 = I U_0 = U_0$$
donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité** : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $U_n = M^n U_0$, alors :
$$U_{n+1} = MU_n = MM^n U_0 = M^{n+1} U_0$$
et la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$U_n = M^n U_0.$$

(b) On cherche les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $M - \lambda I$ ne soit pas inversible :

$$\begin{aligned}
M - \lambda I &= \begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/3-\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 1/2-\lambda \end{pmatrix}\\
&\iff \begin{matrix} L_1 \leftarrow 6L_1 \\ L_2 \leftarrow 12L_2 \\ L_3 \leftarrow 6L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 3(1-2\lambda) & 2 & 0 \\ 3 & 4(1-3\lambda) & 3 \\ 0 & 2 & 3(1-2\lambda) \end{pmatrix}\\
&\iff L_2 \leftrightarrow L_1 \quad \begin{pmatrix} 3 & 4(1-3\lambda) & 3 \\ 3(1-2\lambda) & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3(1-2\lambda) \end{pmatrix}\\
&\iff L_2 \leftarrow L_2 - (1-2\lambda)L_1 \quad \begin{pmatrix} 3 & 4(1-3\lambda) & 3 \\ 0 & 2-4(1-2\lambda)(1-3\lambda) & -3(1-2\lambda) \\ 0 & 2 & 3(1-2\lambda) \end{pmatrix}\\
&\underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\iff} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4(1-3\lambda) & 3 \\ 0 & 2 & 3(1-2\lambda) \\ 0 & 2-4(1-2\lambda)(1-3\lambda) & -3(1-2\lambda) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui donne pour finir :

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \left[1-2(1-2\lambda)(1-3\lambda)\right] L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4(1-3\lambda) & 3 \\ 0 & 2 & 3(1-2\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -3(1-2\lambda) - 3\left[1-2(1-2\lambda)(1-3\lambda)\right] \times (1-2\lambda) = -3(1-2\lambda)\left[1+1-2(1-2\lambda)(1-3\lambda)\right] \\ &= -6(1-2\lambda)\left[1-(1-5\lambda+6\lambda^2)\right] = -6(1-2\lambda)(-6\lambda^2+5\lambda) = 6\lambda(1-2\lambda)(6\lambda-5). \end{aligned}$$

Les deux autres valeurs diagonales de la réduite triangulaire ne peuvent être nulles, donc les valeurs propres de M sont les racines de P, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Sp}(M) = \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}\right\}$$

Comme on a trois valeurs propres distinctes, M est diagonalisable, et les sous-espaces propres associés à chaque valeur propre sont de dimension 1.

Il existe alors une base de vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres 0 , 1/2 et 5/6. En posant P la matrice constituée de cette base de vecteurs propres et

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

on obtient alors :

$$M = PDP^{-1} \Longleftrightarrow D = P^{-1}MP.$$

(c) On en déduit par récurrence rapide que

$$P^{-1}M^nP = D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

puis

$$U_n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1}U_0$$

et par linéarité du produit matriciel, chaque coefficient est donc une combinaison linéaire de α^n, β^n et γ^n (0, $\frac{1}{2^n}$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^n$).

(d) Ces trois suites ont pour limite 0 car elles sont géométriques et leurs raisons sont éléments de $]-1;1[$ donc on en déduit que

$$\mathrm{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{pour } k \in \{1;2;3\}.$$

3. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est un système complet d'évènements),

$$\sum_{k=0}^{4} \mathrm{P}(X_n = k) = 1 \quad \text{donc } \mathrm{P}(X_n = 0) + \mathrm{P}(X_n = 4) = 1 - \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}(X_n = k)$$

et en passant à la limite on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} [\mathrm{P}(X_n = 0) + \mathrm{P}(X_n = 4)] = 1.$$

Cela signifie que lorsque n est très grand, on est presque sûrs que soit tous les électeurs voudront voter pour A, soit il voudront tous voter pour B.

Partie II - Le cas général

4. (a) Sachant que $X_n = k$, pour avoir $X_{n+1} = k+1$ il faut que l'un des k électeurs voulant voter pour A soit tiré en premier (probabilité $\frac{k}{m}$) puis que dans les $m-1$ restants, on choisisse un des $m-k$ voulant voter pour B (probabilité $\frac{m-k}{m-1}$) donc

$$\mathrm{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \frac{k}{m}\frac{m-k}{m-1} = \frac{k(m-k)}{m(m-1)}.$$

Sachant que $X_n = k$, pour avoir $X_{n+1} = k-1$ il faut que l'un des $m-k$ électeurs voulant voter pour B soit tiré en premier (probabilité $\frac{m-k}{m}$) puis que dans les $m-1$ restants, on choisisse un des k voulant voter pour A (probabilité $\frac{k}{m-1}$) donc

$$\mathrm{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k+1) = \frac{m-k}{m}\frac{k}{m-1} = \frac{k(m-k)}{m(m-1)}.$$

Enfin on remarque que sachant $X_n = k$, X_{n+1} est compris entre $k-1$ et $k+1$ donc

$$\mathrm{P}_{(X_n=k)}(k-1 \leqslant X_{n+1} = k+1) = 1 \Longrightarrow \mathrm{P}_{(X_n=k)}\left[(X_{n+1} = k-1) \cup (X_{n+1} = k) \cup X_{n+1} = k+1)\right] = 1$$

et la réunion est incompatible, ce qui donne :

$$\mathrm{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = 1 - \frac{2k(m-k)}{m(m-1)}.$$

(b) Avec le système complet d'évènement $(X_n = j)_{j\in[\![0;m]\!]}$ on a par probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\pi_{n+1,k} &= \sum_{j=0}^{m} \pi_{n,j} \times P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) \\
&= \sum_{j=0}^{k-2} \pi_{n,j} \times 0 + \sum_{j=k-1}^{k+1} \pi_{n,j} \times P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) + \sum_{j=k+2}^{m} \pi_{n,j} \times 0 \\
&= \sum_{j=k-1}^{k+1} \pi_{n,j} \times P_{(X_n=j)}(X_{n+1} = k) \\
&= \pi_{n,k-1} \times \frac{(k-1)(m-k+1)}{m(m-1)} + \pi_{n,k+1} \times \frac{(k+1)(m-k-1)}{m(m-1)} + \pi_{n,k} \times \left(1 - 2\frac{k(m-k)}{m(m-1)}\right) \\
&= \frac{(k-1)(m+1-k)\pi_{n,k-1} + [m(m-1) - 2k(m-k)]\pi_{n,k} + (k+1)(m-1-k)\pi_{n,k+1}}{m(m-1)}.
\end{aligned}$$

5. (a) Montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, on a :

$$\forall k \in [\![1; m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n.$$

- **Initialisation** : $\pi_{0,k}$ est une probabilité donc

$$\pi_{0,k} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^0 = 1.$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité** : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\forall k \in [\![1; m-1]\!],\ \pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$. Alors pour tout $k \in [\![1; m-1]\!]$ on a :

$$\pi_{n+1,k} \leqslant \frac{(k-1)(m+1-k) + [m(m-1) - 2k(m-k)] + (k+1)(m-1-k)}{m(m-1)} \times \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$$

Simplifions le numérateur du premier facteur (qu'on note N) :

$$\begin{aligned} N &= (k-1)(m+1-k) + [m(m-1) - 2k(m-k)] + (k+1)(m-1-k) \\ &= k(m-k) + k - m - 1 + k + m(m-1) - 2k(m-k) + k(m-k) - k + m - 1 - k \\ &= k(m-k)\,[1-2+1] + k(1+1-1-1) + m(-1+1) + m(m-1) - 2 \\ &= m(m-1) - 2 \end{aligned}$$

ce qui donne enfin :

$$\pi_{n+1,k} \leqslant \frac{m(m-1)-2}{m(m-1)} \times \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n = \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^{n+1}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![1; m-1]\!]$,

$$\pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n.$$

(b) On a $m \geqslant 2$ donc $m-1 \geqslant 1$ et enfin $m(m-1) \geqslant 2$ donc $0 \leqslant m(m-1) - 2 < m(m-1)$ et

$$0 \leqslant \frac{m(m-1)-2}{m(m-1)} < \frac{m(m-1)}{m(m-1} = 1.$$

On en déduit que

$$\left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puis par théorème de comparaison, comme $0 \leqslant \pi_{n,k} \leqslant \left(\frac{m(m-1)-2}{m(m-1)}\right)^n$ pour tout $k \in [\![1; m-1]\!]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_{n,k} = 0.$$

6. (a) On peut écrire :

$$V_A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = m)$$

et ces évènements sont inclus les uns dans les autres car $X_n = m \Longrightarrow X_{n+1} = m$. Le théorème de la limite croissante donne alors

$$\mathrm{P}(V_A) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = m).$$

De même

$$V_B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = 0)$$

et ces évènements sont inclus les uns dans les autres car $X_n = 0 \Longrightarrow X_{n+1} = 0$. Le théorème de la limite croissante donne alors

$$\mathrm{P}(V_B) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(X_n = 0).$$

(b) On a donc

$$\mathrm{P}(V_A) + \mathrm{P}(V_B) = \lim_{n\to+\infty} \Big[\mathrm{P}(X_n = m) + \mathrm{P}(X_n = 0)\Big].$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(X_n = m) + \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} \pi_{n,k}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\Big[\mathrm{P}(X_n=m)+\mathrm{P}(X_n=0)\Big]=1-\sum_{k=1}^{m-1}\lim_{n\to+\infty}\pi_{n,k}=1,$$

en enfin

$$\mathrm{P}(V_A)+\mathrm{P}(V_B)=1.$$

Ce résultat signifie qu'il est presque certain qu'au bout d'un certain temps, tous les candidats auront la même intention de vote.

7. (a) Comme une seule personne peut changer d'avis chaque jour, on a

$$|X_{n+1}-X_n|\leqslant 1$$

donc $Z_n(\Omega)\subset\{-1;0;1\}$.

De plus (avec $X_n=1$ qui peut donner avec une probabilité non nulle $X_{n+1}=0$, $X_{n+1}=1$ et $X_{n+1}=2$ on a bien $\{-1;0;1\}\subset Z_n(\Omega)$ et enfin

$$Z_n(\Omega)=\{-1;0;1\}.$$

(b) Avec le système complet d'évènement $(X_n=k)_{k\in[\![0;m]\!]}$ on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z_n=1) &= \sum_{k=0}^{m}\mathrm{P}\Big[(Z_n=1)\cap(X_n=k)\Big]=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{P}\Big[(X_{n+1}-X_n=1)\cap(X_n=k)\Big]\\ &= \sum_{k=0}^{m}\mathrm{P}\Big[(X_{n+1}=k+1)\cap(X_n=k)\Big]\end{aligned}$$

Or $X_{n+1}=m+1$ est impossible (il y a m électeurs) et $(X_n=0)\cap(X_{n+1}=1)$ également car si $X_n=0$, $X_{n+1}=0$.

Enfin par probabilités composées et avec le résultat de 4)a) on obtient :

$$\mathrm{P}(Z_n=1)=\sum_{k=1}^{m-1}\pi_{n,k}\times\frac{k(m-k)}{m(m-1)}.$$

(c) Un raisonnement identique donne (avec $(X_{n+1}=-1)$ et $(X_n=m)\cap(X_{n+1}=m-1)$ impossibles) :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z_n=-1) &= \sum_{k=1}^{m-1}\mathrm{P}(X_n=k)\times\mathrm{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k-1)=\sum_{k=1}^{m-1}\pi_{n,k}\times\frac{k(m-k)}{m(m-1)}\\ &= \mathrm{P}(Z_n=1).\end{aligned}$$

(d) On en déduit que (Z_n est finie donc admet une espérance) :

$$\begin{aligned}E(Z_n) &= -1\times\mathrm{P}(Z_n=-1)+0\times\mathrm{P}(Z_n=0)+1\times\mathrm{P}(Z_n=1)\\ &= -\mathrm{P}(Z_n=1)+\mathrm{P}(Z_n=1)=0.\end{aligned}$$

(e) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, par linéarité de l'espérance (X_n et X_{n+1} sont finies donc admettent des espérances) :

$$E(Z_n)=E(X_{n+1})-E(X_n)=0\quad\text{donc}\quad E(X_{n+1})=E(X_n).$$

On en déduit par une récurrence triviale que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$E(X_n)=E(X_0)=a$$

car X_0 est une variable aléatoire certaine égale à a.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$E(X_n) = a = \sum_{k=0}^{m} k \times \pi_{n,k}.$$

On fait tendre n vers $+\infty$ et par unicité de la limite on obtient :

$$a = 0 \times \lim_{n\to+\infty} \pi_{n,0} + m \times \lim_{n\to+\infty} \pi_{n,m} + \sum_{k=1}^{m} k \times \lim_{n\to+\infty} \pi_{n,k} = mP(V_A)$$

car tous les autres termes valent 0 (la limite pour $1 \leqslant k \leqslant m-1$ et la valeur de k pour $k = 0$).

On en déduit que

$$m\,\mathrm{P}(A) = a \quad \text{et enfin} \quad \mathrm{P}(V_A) = \frac{a}{m}.$$

Problème 2 - Une propriété limite des lois de Pareto

Question préliminaire

Soit g une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

9. (a) Le changement de variable $t = \alpha + (\beta - \alpha)x$ donne directement le résultat :

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt = \int_0^1 g\big(\alpha + (\beta-\alpha)x\big)\ dx.$$

(b) Avec l'égalité ci-dessus, l'encadrement cherché est équivalent à :

$$\int_0^1 g(c+(b-c)x)\ dx \leqslant \int_0^1 g(c+(d-c)x)\ dx \leqslant \int_0^1 g(a+(d-a)x)\ dx.$$

Or on a $a < c < d < b$ donc pour tout $x \in [0;1]$ $(x \geqslant 0)$:

$$d < b \Longrightarrow d - c \leqslant b - c \Longrightarrow (d-c)x \leqslant (b-c)x \Longrightarrow c + (d-c)x \leqslant c + (b-c)x$$

et par décroissance de g,

$$g(c+(b-c)x) \leqslant g(c+(d-c)x).$$

En intégrant l'inégalité sur $[0;1]$ on obtient l'inégalité de gauche.

D'autre part on a

$$[c+(d-c)x] - [a+(d-a)x] = (c-a) + (a-c)x = (c-a)\ (1-x) \geqslant 0$$

sur $[0;1]$, car $1 - x \geqslant 0$ et $c - a \geqslant 0$. D'où

$$c + (d-c)x \geqslant a + (d-a)x \quad \text{et par décroissance de } g, \quad g(c+(d-c)x) \leqslant g(a+(d-a)x.$$

En intégrant l'inégalité sur $[0;1]$, on obtient l'inégalité de droite.

L'encadrement

$$\int_0^1 g(c+(b-c)x)\ dx \leqslant \int_0^1 g(c+(d-c)x)\ dx \leqslant \int_0^1 g(a+(d-a)x)\ dx$$

est donc vrai et par équivalence des deux résultats, on a bien :

$$\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\ dt \leqslant \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\ dt \leqslant \frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\ dt.$$

Partie I - Partie fractionnaire d'une variable à densité

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$\lfloor x \rfloor \leqslant x \quad \text{donc} \quad \{x\} = \lfloor x \rfloor - x \geqslant 0.$$
D'où pour tout $y < 0$,
$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leqslant y) = \mathrm{P}(\{X\} \leqslant y) = 0$$
car c'est un évènement impossible.

D'autre part on a
$$x < [x] + 1 \quad \text{donc} \quad \{x\} = x - [x] < 1$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où pour tout $y \geqslant 1$,
$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leqslant y) = 1$$
car c'est un évènement certain.

11. On transforme l'évènement par équivalence :
$$Y = 0 \Longleftrightarrow \{X\} = 0 \Longleftrightarrow X - [X] = 0 \Longleftrightarrow X = [X] \Longleftrightarrow X \in \mathbb{Z}.$$
De plus on sait que X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc ne peut être négatif, ce qui donne :
$$Y = 0 \Longleftrightarrow X \in \mathbb{N}.$$
On en déduit bien que
$$(Y = 0) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X = n).$$
La réunion est incompatible, on en déduit (X est à densité) :
$$\mathrm{P}(Y = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0.$$

12. Soit y un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

    (a) Avec le système complet d'évènements $(\lfloor X \rfloor = n)_{n \in \mathbb{N}}$, les probabilités totales donnent :
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \leqslant y) = \mathrm{P}(X - \lfloor X \rfloor \leqslant y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left[(X - \lfloor X \rfloor \leqslant y) \cap (\lfloor X \rfloor = n)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left[(X \leqslant n + y) \cap (\lfloor X \rfloor = n)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left[(X \leqslant n + y) \cap (n \leqslant X < n + 1)\right] \end{aligned}$$
    Or a a supposé que $y < 1$, donc $n + y < n + 1$ enfin :
$$(X \leqslant n + y) \cap (X < n + 1) = (X \leqslant n + y)$$
    ce qui donne (X est à densité et sa densité est f) :
$$F_Y(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(n \leqslant X \leqslant n + y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\ dt.$$

    (b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $n < n + y < n + 1$ et f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc en appliquant le préliminaire avec $c = n$, $b = n + 1$ et $d = n + y$:
$$\frac{1}{n + 1 - n} \int_n^{n+1} f(t)\ dt \leqslant \frac{1}{n + y - n} \int_n^{n+y} f(t)\ dt$$
    donc
$$y \int_n^{n+1} f(t)\ dt \leqslant \int_n^{n+y} f(t)\ dt.$$

- Pour tout $n \geqslant 1$ on a $n-1+y < n < n+y$ car $0 < y < 1$ et f est décroissante et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc en appliquant le préliminaire avec $c = n$, $a = n-1+y$ et $d = n+y$:

$$\frac{1}{n+y-n}\int_n^{n+y} f(t)\ dt \leqslant \frac{1}{n+y-(n-1+y)}\int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt$$

donc

$$\int_n^{n+y} f(t)\ dt \leqslant y\int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt.$$

(c) On somme de 0 à $+\infty$ la première inégalité du b) :

$$y\int_0^{+\infty} f(t)\ dt \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int_n^{n+y} f(t)\ dt = F_Y(y).$$

Pour l'inégalité de droite, on somme la deuxième inégalité du b) pour k allant de 1 à $+\infty$:

$$y\int_y^{+\infty} f(t)\ dt \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\int_n^{n+y} f(t)\ dt.$$

Enfin on ajoute $\int_0^y f(t)\ dt$ des deux côtés et on obtient :

$$\int_0^y f(t)\ dt + y\int_y^{+\infty} f(t)\ dt \geqslant F_Y(y)$$

ce qui donne bien :

$$y\int_0^{+\infty} f(t)\ dt \leqslant F_Y(y) \leqslant \int_0^y f(t)dt + y\int_y^{+\infty} f(t)\ dt.$$

De plus X est à valeurs positives donc :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 1 = \mathrm{P}(X \geqslant 0) = 1 \quad \text{et l'inégalité de gauche donne} \quad y \leqslant F_Y(y).$$

De plus on a

$$\int_y^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt - \int_0^y f(t)\ dt = 1 - \int_0^y f(t)\ dt \leqslant 1$$

par positivité de l'intégrale ; en effet $f(t) \geqslant 0$ et les bornes sont dans l'ordre croissant donc $\int_0^y f(t)\ dt \geqslant 0$. On en déduit que

$$F_Y(y) \leqslant \int_0^y f(t)\ dt + y.$$

Enfin on pour tout $t \in [0; y]$, par décroissance de f, $f(t) \leqslant f(0) = M$ donc en intégrant avec des bornes dans l'ordre croissant :

$$\int_0^y f(t)\ dt \leqslant \int_0^y M dt = My \leqslant M \quad \text{car} \quad y \leqslant 1.$$

Cela donne bien $F_Y(y) \leqslant y + M$, puis :

$$y \leqslant F_Y(y) \leqslant y + M.$$

Partie II - Premier chiffre significatif d'une variable de Pareto

13. g_λ est une fonction à valeurs positives, continue sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$, il reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t)\ dt$ converge et vaut 1. Par relation de Chasles,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t)\ dt = \int_{-\infty}^{1} 0\ dt + \int_{1}^{+\infty} \frac{\lambda}{t^{\lambda+1}}\ dt$$

$\int_{-\infty}^{1} g_\lambda(t)\ dt$ converge et vaut 0.

La deuxième intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$ et pour $x \geqslant 1$,

$$\int_{1}^{x} g_\lambda(t)\ dt = \left[\frac{\lambda t^{-\lambda}}{-\lambda}\right]_1^x = -\frac{1}{x^\lambda} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

car $\lambda > 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\lambda = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\lambda} = 0$.

On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t)\ dt$ converge et vaut 1, et g_λ est une densité de probabilité.

14. Pour tout $x < 1$,

$$G_\lambda(x) = \mathrm{P}(Z \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0.$$

Pour tout $x \geqslant 1$,

$$G_\lambda(x) = \mathrm{P}(Z \leqslant x) = \int_{-\infty}^{1} 0\ dt + \int_{1}^{x} \frac{\lambda}{t^{\lambda+1}}\ dt = 0 + \left[\frac{\lambda t^{-\lambda}}{-\lambda}\right]_1^x = -\frac{1}{x^\lambda} + 1.$$

On rassemble :

$$G_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^\lambda} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

15. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_\lambda(x) &= \mathrm{P}(X_\lambda \leqslant x) = \mathrm{P}(\log(Z_\lambda) \leqslant x) = \mathrm{P}\left(\frac{\ln(Z_\lambda)}{\ln 10} \leqslant x\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\ln(Z_\lambda) \leqslant x \ln 10\right) = \mathrm{P}\left(Z_\lambda \leqslant e^{x \ln 10}\right) = \mathrm{P}\left(Z_\lambda \leqslant 10^x\right) \\ &= G_\lambda\big(10^x\big). \end{aligned}$$

(b) On en déduit que :

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 10^x < 1 \\ 1 - \frac{1}{(10^x)^\lambda} & \text{si } 10^x \geqslant 1. \end{cases}$$

On résout les inéquations (avec $\ln(10) > 0$ car $10 > e$) :

$$10^x < 1 \iff x\ln(10) < \ln(1) \iff x < 0 \quad \text{donc} \quad 10^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$$

Enfin on a calcule $(10^x)^\lambda = 10^{\lambda x} = e^{\lambda x \ln 10}$ et on obtient :

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-[\lambda \ln(10)]x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

et X_λ suit donc une loi exponentielle de paramètre $\lambda \ln 10$.

16. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \ln 10 e^{-\lambda \ln 10 x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de X_λ, nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$, continue, décroissante et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ donc les résultats de la partie I s'appliquent.

On en déduit que pour tout $y \in]0;1[$,

$$y \leqslant F_{Y_\lambda}(y) \leqslant y + f(0) = y + \lambda \ln 10.$$

Or $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \lambda \ln 10 = 0$ donc par encadrement,

$$\lim_{\lambda \to 0^+} F_{Y_\lambda}(y) = \lim_{\lambda \to 0^+} \mathrm{P}(Y_\lambda \leqslant y) = y.$$

Il reste à prouver que :

$$\forall y \in]-\infty;0], \quad \lim_{\lambda \to 0^+} \mathrm{P}(Y_\lambda \leqslant y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in [1;+\infty[, \quad \lim_{\lambda \to 0^+} \mathrm{P}(Y_\lambda \leqslant y) = 1.$$

Or la partie I montre que la fonction de répartition de Y_λ vérifie exactement ces deux propriétés (nulle sur $\mathbb{R}^-$ et égale à 1 sur $[1;+\infty[$.
En passant à la limite pour $\lambda \to 0$ on obtient le résultat.

D'où en posant une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $[0;1]$ on a

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \lim_{\lambda \to 0^+} F_{Y_\lambda}(y) = F_Y(y)$$

et Y_λ converge en loi vers Y quand λ tend vers 0 par valeurs positives.

17. (a) Question très difficile.

$\alpha(x) = k$ signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$k \times 10^n \leqslant x < (k+1) \times 10^n$$

(où $n = 0$ si $1 \leqslant x < 10$, 1 si $10 \leqslant x < 100$, 2 si $100 \leqslant x < 1000$, etc...

D'où

$$\begin{aligned}
\alpha(x) = k \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \ln k + n \ln 10 \leqslant \ln x < \ln(k+1) + n \ln 10 \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\ln k}{\ln 10} + n \leqslant \frac{\ln x}{\ln 10} < \frac{\ln(k+1)}{\ln 10} + n \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \log(k) + n \leqslant \log x < \log(k+1) + n
\end{aligned}$$

Montrons alors que n est la partie entière de $\log(x)$:

Pour tout $k \in [1;9]$, $\log 1 = 0 \leqslant \log k \leqslant \log 9 = \frac{\ln 9}{\ln 10} < 1$ donc on a $\log x \geqslant n$ car $\ln k \geqslant 0$.

D'autre part pour tout $k \in [1;9]$, $\log(k+1) \leqslant \log 10 = 1$ donc $\log x < n+1$.

On obtient que

$$n \leqslant \log x < n+1 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{donc} \quad n = \lfloor \log x \rfloor.$$

En remplaçant on obtient :

$$\alpha(x) = k \quad \Longleftrightarrow \quad \log k + \lfloor \log x \rfloor \leqslant \log x < \log(k+1) + \lfloor \log x \rfloor \Longleftrightarrow \log k \leqslant \log x - \lfloor \log x \rfloor < \log(k+1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \log k \leqslant \{\log x\} < \log(k+1) \Longleftrightarrow \{\log(x)\} \in \big[\log k, \log(k+1)\big[.$$

(b) Pour tout $\lambda > 0$ et tout $k \in [\![1;9]\!]$ on a :

$$\mathrm{P}(C_\lambda = k) = \mathrm{P}(\alpha(Z_\lambda) = k) = \mathrm{P}(\log k \leqslant \{\log Z_\lambda\} < \log(k+1)) = \mathrm{P}(\log k \leqslant Y_\lambda < \log(k+1)).$$

Or Y_λ converge en loi vers une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $[0;1]$ lorsque λ tend vers 0^+ donc

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \mathrm{P}(\log k \leqslant Y_\lambda < \log(k+1)) = \mathrm{P}(\log k \leqslant Y < \log(k+1))$$

Comme $k \in [\![1;9]\!]$, on a vu que $0 \leqslant \log(k) \leqslant 1$ donc

$$F_Y(\log(k)) = \log(k) \quad \text{et} \quad F_Y(\log(k+1)) = \log(k+1)$$

et enfin :

$$\mathrm{P}(C_\lambda = k) = \log(k+1) - \log(k) = \frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln 10} = \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln 10} = \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$