HEC 2011 - Correction

Exercice

1. (a) A est symétrique donc diagonalisable.

   (b) On résout $AX = X$

$$AX = X \iff \begin{cases} -x + 1/2y + 1/2z = 0 \\ 1/2x - y + 1/2z = 0 \\ 1/2x + 1/2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{c} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array} \begin{cases} -x + 1/2y + 1/2z = 0 \\ -3/2y + 3/2z = 0 \\ +3/2y - 3/2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{array}{c} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \begin{cases} -x + 1/2y + 1/2z = 0 \\ -3/2y + 3/2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$E_1(A) = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \neq \{0\}$$

et 1 est bien valeur propre de A, avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

   (c) Soit λ un réel. Appliquons la méthode de Gauss à la matrice A :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} \iff \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{array} \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\iff L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ -2\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\lambda L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda - 1 & 1 + 2\lambda \\ & 1 + 2\lambda & 1 - 4\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{c} \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda - 1 & 1 + 2\lambda \\ 0 & 0 & 2 + 2\lambda - 4\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont les valeurs qui annulent l'un au moins des coefficients de la diagonale, donc les solutions de :

$$-2\lambda - 1 = 0 \iff \lambda = -1/2 \quad \text{et} \quad 2 + 2\lambda - 4\lambda^2$$

qui a pour discriminant puis racines :

$$\Delta = 4 + 32 = 36 \quad , \quad \lambda_1 = \frac{-2+6}{-8} = -\frac{1}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{-2-6}{-8} = 1.$$

On obtient finalement :

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\} \qquad \text{et on a déjà vu que} \qquad E_1(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = Vect[X_1]$$

et la famille (X_1) est libre (constituée d'un vecteur non nul) et génératrice de $E_1(A)$, c'en est une base.

On cherche alors le sous-espace propre associé à $-1/2$, on a :

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{2}}(A) \iff \left(A + \frac{1}{2}I\right)X = 0 \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\iff x = -y-z \iff X = \begin{pmatrix}-y-z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

donc on en déduit que :

$$E_{-\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}[X_2, X_3]$$

et la famille (X_2, X_3) est libre (2 vecteurs non colinéaires) et génératrice de $E_{-\frac{1}{2}}(A)$, c'en est une base.

Enfin on concatène les bases des sous-espaces propres, la famille (X_1, X_2, X_3) est donc une base constituée de vecteurs propres de A.

2. La matrice I est élément de S_n (ses coefficients sont bien positifs et $IX_0 = X_0$) mais pas $-I$, qui a des coefficients strictement négatifs.

   S_n n'est donc pas stable par produit externe donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. (a) Soient A et B deux matrices de S_n. On pose $C = AB$. On note a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} les coefficients des matrices A, B, C.

   Comme $AX_0 = BX_0 = X_0$, on a :

$$CX_0 = ABX_0 = AX_0 = X_0$$

   et X_0 est bien un vecteur colonne associé à la valeurs propre 1.

   Montrons que les coefficients de C sont positifs. Soient i et j dans $\ln 1; n]\!]$, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \geqslant$$

   car pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, a_{ik} et b_{kj} sont positifs.

   Donc $C \in S_n$.

4. (a) Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ (qui existe forcément car λ est une valeur propre).
On considère $M = \max(|w_1|, |w_2|, \ldots, |w_n|)$ et on note k un entier tel que $M = |w_k|$ (c'est-à-dire qui réalise le maximum).

Comme $W \neq 0$, on a $M \neq 0$ (sinon tous les w_i seraient nuls) et $w_k \neq 0$. On peut donc poser :

$$V = \frac{1}{w_k} W$$

Le vecteur V est un vecteur propre de A associé à λ, montrons qu'il vérifie les conditions imposées : pour tout $i \in [\![1; n]\!]$,

$$|v_i| = \left| \frac{w_i}{w_k} \right| = \frac{|w_i|}{M} \leqslant \frac{M}{M} = 1$$

Et par définition de k et V :

$$v_k = \frac{w_k}{w_k} = 1.$$

(b) Comme $AX_0 = X_0$, on remarque que pour tout $i \in [\![1; n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

Par ailleurs : $AV = \lambda V$ donc :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i$$

En particulier, pour $i = k$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j = \lambda$$

Donc, en appliquant l'inégalité triangulaire (les a_{kj} sont positifs) :

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj} |v_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1.$$

Notons I_k l'ensemble des entiers de 1 à n privé de l'entier k. On a :

$$\sum_{j \in I_k} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} - a_{kk} = 1 - a_{kk}$$

Par ailleurs :

$$\sum_{j \in I_k} a_{kj} v_j = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j - a_{kk} v_k = \lambda - a_{kk} \times 1 = \lambda - a_{kk}$$

On applique l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda - a_{kk}| \leqslant \sum_{j \in I_k} a_{kj} |v_j| \leqslant \sum_{j \in I_k} a_{kj} = 1 - a_{kk}$$

(c) D'après la question précédente :

$$-(1 - a_{kk}) \leqslant \lambda - a_{kk} \leqslant 1 - a_{kk}$$

Donc :

$$-1 + 2a_{kk} \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Si tous les coefficients diagonaux de A sont strictement supérieurs à $1/2$, on a $a_{kk} > 1/2$ puis

$$\lambda \geqslant 2a_{kk} - 1 > 0.$$

Donc 0 ne peut pas être une valeur propre de A et A est inversible.

Problème

Partie I. Quelques exemples. Premières propriétés.

1. (a) On calcule sans difficulté :

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{h} dt &= [t]_{-h}^{h} = 2h. \\
\int_{-h}^{h} (x+t)\ dt &= x\int_{-h}^{h} dt + \int_{-h}^{h} t\ dt = 2xh + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-h}^{h} = 2xh + 0 = 2xh. \\
\int_{-h}^{h} t(x+t)\ dt &= x\int_{-h}^{h} t\ dt + \int_{-h}^{h} t^2\ dt = x\times 0 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-h}^{h} = \frac{h^3+h^3}{3} = \frac{2}{3}h^3. \\
\int_{-h}^{h} (x+t)^2\ dt &= x^2\int_{-h}^{h} dt + 2x\int_{-h}^{h} t\ dt + \int_{-h}^{h} t^2\ dt = 2x^2h + 2x\times 0 + \frac{2}{3}h^3 = 2x^2h + \frac{2}{3}h^3.
\end{aligned}$$

(b) On calcule de même :

$$\int_{-h}^{h} t(x+t)^2\ dt = x^2\int_{-h}^{h} t\ dt + 2x\int_{-h}^{h} t^2\ dt + \int_{-h}^{h} t^3\ dt = 0 + 2x\times\frac{2}{3}h^3 + \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-h}^{h} = \frac{4}{3}xh^3$$

car le crochet vaut 0.

(c) On part de la nouvelle formule et on fait le changement de variable $u = ht$ qui donne :

$$t = \frac{u}{h} \quad , \quad dt = \frac{1}{h}du \quad , \quad t = -1 \Longrightarrow u = -h \quad , \quad t = 1 \Longrightarrow u = h$$

donc :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x+ht)\ dt = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+u)\ du = S_x(h)$$

et de même :

$$\frac{3}{2h}\int_{-1}^{1} tf(x+ht)\ dt = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} \frac{u}{h}f(x+u)\ du = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} uf(x+u)\ du = G_x(h)$$

2. (a) Si k est pair, $(-1)^k = 1$ donc

$$h^k(1-(-1)^k) = 0.$$

Si k est impair, $(-1)^k = -1$ donc

$$h^k(1-(-1)^k) = 2h^k.$$

(b)

$$S_0(h) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (ht)^n dt = \frac{h^n}{2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{h^n}{2(n+1)}(1-(-1)^{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{h^n}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$G_0(h) = \frac{3}{2h}\int_{-1}^{1} t\times(ht)^n dt = \frac{3h^n}{2h}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_{-1}^{1} = \frac{3h^{n-1}}{2(n+2)}(1-(-1)^{n+2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{3h^{n-1}}{n+2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(c) On utilise la formule du binôme pour développer la puissance :

$$\begin{aligned}
S_x(h) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (x+ht)^n dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ht)^k x^{n-k}\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{n-k}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (ht)^k\ dt
\end{aligned}$$

On reconnaît la valeur de $S_0(h)$ pour $f(t) = t^k$, qui vaut 0 lorsque k est impair et $\frac{h^k}{k+1}$ si k est pair donc :

$$S_x(h) = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{h^k}{k+1} = x^n + h^2 A_x(h)$$

en posant (c'est bien une fonction polynomiale en h) :

$$A_x(h) = \sum_{k=2, k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{h^{k-2}}{k+1}$$

De même :

$$\begin{aligned} G_x(h) &= \frac{3}{2h} \int_{-1}^{1} t(x+ht)^n dt = \frac{3}{2h} \int_{-1}^{1} t \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ht)^k x^{n-k} \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{3}{2h} \int_{-1}^{1} t \times (ht)^k \, dt \end{aligned}$$

On reconnaît la valeur de $G_0(h)$ pour $f(t) = t^k$, qui vaut 0 lorsque k est pair et $\frac{3h^{k-1}}{k+2}$ si k est pair donc :

$$G_x(h) = \sum_{k=0, k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{3h^{k-1}}{k+2} = nx^{n-1} + h^2 B_x(h)$$

en posant (c'est bien une fonction polynomiale en h) :

$$B_x(h) = \sum_{k=3, k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{3h^{k-3}}{k+2}$$

Lorsque $h \to 0^+$, $h^2 A_x(h)$ et $h^2 B_x(h)$ tendent trivialement vers 0 donc les limites existent et :

$$s(x) = x^n \quad \text{et} \quad g(x) = nx^{n-1}.$$

3. (a) On étudie les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \neq 1$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

(b) On calcule sans difficulté : par parité de la valeur absolue (donc imparité de $t \mapsto t \times |t|$) on a :

$$S_0(h) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |ht| \, dt = \frac{h}{2} \times 2 \int_{0}^{1} t \, dt = \frac{1}{2} h \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0 = s(0)$$

puis

$$G_0(h) = \frac{3}{2h} \int_{-1}^{1} t \times |ht| \, dt = \frac{3}{2} \times \int_{-1}^{1} t \times |t| \, dt = 0 \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0 = g(0)$$

4. (a) On peut alors calculer l'intégrale :

$$S_x(h) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t) \, dt = \frac{1}{2h} \left[F(x+t) \right]_{-h}^{h} = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}.$$

(b) La fonction F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$, donc lorsque h est au voisinage de 0, un développement limité obtenu par la formule de Taylor-Young donne :

$$F(x+h) = F(x) + hf(x) + o(h) \quad \text{et} \quad F(x-h) = F(x) - hf(x) + o(h)$$

On remplace dans l'expression de $S_x(h)$:

$$S_x(h) = \frac{2hf(x) + o(h)}{2h} = f(x) + o(1) \xrightarrow[h \to 0^+]{} f(x)$$

Donc $s(x)$ existe et $s(x) = f(x)$.

5. (a) On considère la fonction v_x définie par sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$v_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x) - tf'(x)}{t}$$

Par continuité de f, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, montrons qu'elle peut être prolongée en 0 par continuité :

Avec la formule de Taylor-Young, on obtient un développement limité de f au voisinage de x : pour tout t au voisinage de 0,

$$f(x+t) = f(x) + tf'(x) = o(t) \quad \text{donc} \quad v_x(t) = \frac{o(t)}{t} = o(1) \xrightarrow[t\to 0, t\neq 0]{} 0.$$

On prolonge alors v_x par $v_x(0) = 0$, la fonction v_x est bien continue sur $\mathbb{R}$, et on a : pour $t = 0$,

$$f(x+0) = f(x) + 0f'(x) + 0v_x(0)$$

d'une part, et d'autre part pour tout $t \neq 0$:

$$f(x) + tf'(x) + tv_x(t) = f(x) + tf'(x) + [f(x+t) - f(x) - tf'(x)] = f(x+t)$$

donc v_x satisfait à toutes les conditions demandées.

(b) On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} G_x(h) &= \frac{3}{2h^3}\left[f(x)\int_{-h}^{h} t\ dt + f'(x)\int_{-h}^{h} t^2\ dt + \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt\right] = \frac{3}{2h^3}\left[0 + f'(x)\times\frac{2}{3}h^3 + \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt\right] \\ &= f'(x) + \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt \end{aligned}$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x\to 0} v_x(t) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que que pour tout $t \in [-\delta, \delta]$,

$$|v_x(t)| \leqslant \varepsilon$$

Pour tout $h \in]0, \delta]$, pour tout $t \in [-h; h]$,

$$-\delta \leqslant -h \leqslant t \leqslant h \leqslant \delta \quad \text{donc} \quad t \in [-\delta; \delta] \quad \text{et} \quad |v_x(t)| \leqslant \varepsilon$$

Par inégalité triangulaire, on obtient alors :

$$\left|\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt\right| \leqslant \int_{-h}^{h} t^2 |v_x(t)|\ dt$$

Or en intégrant avec les bornes dans l'ordre croissant l'inégalité $t^2|v_x(t)| \leqslant t^2\varepsilon$ (obtenue car $t^2 \geqslant 0$) on a :

$$\int_{-h}^{h} t^2|v_x(t)|\ dt \leqslant \varepsilon\int_{-h}^{h} t^2\ dt = \frac{2h^3}{3}\varepsilon$$

Enfin en rassemblant ces deux inégalités on a bien :

$$\left|\frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt\right| \leqslant \frac{3}{2h^3}\times\frac{2h^3}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

(d) On en déduit que lorsque h tend vers 0, la fonction

$$h \mapsto \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt$$

admet une limite nulle, donc par opération sur les limites, G_x admet une limite en 0 et :

$$g(x) = \lim_{h\to 0}\left[f'(x) + \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt\right] = f'(x).$$

6. (a) On développe par identités remarquables :

$$\varphi(a,b) = \int_{-h}^{h} \left(\Big[f(x+t)\Big]^2 - 2(b+at)f(x+t) + (b+at)^2 \right) \, dt$$

puis on développe à nouveau les deux termes de droite et on utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\varphi(a,b) &= \int_{-h}^{h} \left(\Big[f(x+t)\Big]^2 - 2bf(x+t) - 2atf(x+t) + b^2 + 2at + a^2t^2 \right) \, dt \\
&= \int_{-h}^{h} [f(x+t)]^2 \, dt - 2b \int_{-h}^{h} f(x+t) \, dt - 2a \int_{-h}^{h} tf(x+t) \, dt \\
&\quad + b^2 \int_{-h}^{h} dt + 2a \int_{-h}^{h} t \, dt + a^2 \int_{-h}^{h} t^2 \, dt
\end{aligned}$$

Enfin on a déjà vu (voir la première question) que :

$$\int_{-h}^{h} dt = 2h \quad , \quad \int_{-h}^{h} t \, dt = 0 \quad , \quad \int_{-h}^{h} t^2 \, dt = \frac{2}{3}h^3$$

ce qui donne bien :

$$\varphi(a,b) = \int_{-h}^{h} [f(x+t)]^2 \, dt - 2b \int_{-h}^{h} f(x+t) \, dt - 2a \int_{-h}^{h} tf(x+t) \, dt + \frac{2}{3}h^3a^2 + 2hb^2.$$

(b) La fonction φ s'écrit, avec k_1, k_2, k_3, k_4 et k_5 des constantes (par rapport à a et b) :

$$\varphi(a,b) = k_1 - 2k_2a - 2k_3b + k_4a^2 + k_5b^2$$

La fonction φ est une combinaison linéaire de 5 fonctions de classe C^2 donc φ est de classe C^2 et de plus :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}(a,b) = -2k_2 + 2k_4a \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b}(a,b) = -2k_3 + 2k_5a.$$

Donc φ admet un unique point critique (a^*, b^*) avec :

$$a^* = \frac{k_2}{k_4} = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} tf(x+t) \, dt = G_x(h) \quad \text{et} \quad b^* = \frac{k_3}{k_5} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t) \, dt = S_x(h)$$

Partie II : Probabilités

7. (a) Par linéarité de l'espérance et propriétés de la variance :

$$E(X) = \frac{1}{2} \quad , \quad V(X) = \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad E(hX) = \frac{h}{2} \quad \text{et} \quad V(hX) = \frac{h^2}{4}$$

(b) On applique le théorème de transfert avec la fonction $g(t) = f(ht + x)$:

$$E(f(hX+x)) = f(h+x)\,\mathrm{P}(X=1) + f(x)\,\mathrm{P}(X=0) = \frac{f(x+h)+f(x)}{2}$$

De même :

$$E((f(hX+x))^2) = f(h+x)^2\,\mathrm{P}(X=1) + f(x)^2\,\mathrm{P}(X=0) = \frac{[f(x+h)]^2 + [f(x)]^2}{2}$$

Donc par formule de Koenig-Huyghens :

$$\begin{aligned}
V(f(hX+x)) &= \frac{[f(x+h)]^2 + [f(x)]^2}{2} - \left(\frac{f(x+h)+f(x)}{2} \right)^2 \\
&= \frac{2[f(x+h)]^2 + 2[f(x)]^2 - [f(x+h)]^2 - [f(x)]^2 - 2f(x+h)f(x)}{4} \\
&= \frac{[f(x+h)]^2 + [f(x)]^2 - 2f(x+h)f(x)}{4} = \frac{[f(x+h) - f(x)]^2}{4}.
\end{aligned}$$

De plus, toujours par théorème de transfert :

$$E[hXf(hX+x)] = hf(h+x)\,\mathrm{P}(X=1) + 0f(x)\,\mathrm{P}(X=0) = \frac{hf(x+h)}{2}$$

Donc (formule de Koenig-Huyghens pour la covariance) :

$$\mathrm{cov}(hX, f(hX+x) = \frac{hf(x+h)}{2} - \frac{h}{2} \times \frac{f(x+h)+f(x)}{2} = \frac{2hf(x+h) - hf(x+h) - hf(x)}{4}$$

et enfin :

$$\mathrm{cov}(hX, f(hX+x)) = \frac{h[f(x+h)-f(x)]}{4}$$

(c) Dans ce cas les deux variables ont une variance non nulle, $r_x(h)$ existe et vaut :

$$\begin{aligned} r_x(h) &= \frac{\frac{h[f(x+h)-f(x)]}{4}}{\sqrt{\frac{h^2}{4} \times \frac{[f(x+h)-f(x)]^2}{4}}} \\ &= \frac{\frac{h[f(x+h)-f(x)]}{4}}{\frac{h|f(x+h)-f(x)|}{4}} = \frac{f(x+h)-f(x)}{|f(x+h)-f(x)|} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } f(x+h)-f(x) > 0 \\ -1 & \text{si } f(x+h)-f(x) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dans les deux cas, le coefficient de corrélation linéaire vérifie $|r_x(h)| = 1$ donc il existe une relation de dépendance affine entre $f(hX+x)$ et hX.

On peut donc écrire :

$$f(hX+x) = a(hX) + b$$

et comme X ne prend que les valeurs 0 et 1, a et b vérifient le système :

$$\begin{cases} f(h+x) = ah + b \\ f(x) = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ b = f(x) \end{cases}$$

ce qui donne donc :

$$f(hX+x) = [f(x+h)-f(x)]X + f(x)$$

(d) Si $f(x+h) = f(x)$, $f(hX+x)(\Omega) = \{f(x)\}$ donc $f(hX+x)$ est une variable certaine égale à $f(x)$.

La relation précédente est encore valable dans ce cas.

8. (a) La fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} 1/2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction densité de X. La fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/2(x+1) & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est la fonction de répartition de X. Enfin (les deux autres intégrales dans le calcul de $E(X^2)$ convergent absolument et valent 0, et celle qu'on écrit converge absolument car n'est pas généralisée) :

$$E(X) = \frac{-1+1}{2} = 0 \quad , \quad V(X) = E(X^2) - 0^2 = \int_{-1}^{1} 1/2t^2 dt = \frac{1}{3}$$

(b) D'après le théorème de transfert (les deux autres intégrales convergent absolument et valent 0, et celle qu'on écrit converge absolument car n'est pas généralisée) :

$$E(f(hX+x) = \int_{-1}^{1} f(ht+x)1/2dt = S_x(h)$$

d'après la question 1)c). Toujours d'après le théorème de transfert :

$$E((f(hX+x)^2) = \int_{-1}^{1} (f(ht+x))^2 1/2dt$$

On fait le changement $u = ht$, qui donne :

$$t = \frac{1}{h}u \quad , \quad dt = \frac{1}{h}du \quad , \quad t = -1 \Longrightarrow u = -h \quad , \quad t = 1 \Longrightarrow u = h$$

donc :

$$E((f(hX+x)^2) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} (f(u+x))^2 du$$

et par formule de Koenig-Huyghens :

$$V(f(hX+x)) = E((f(hX+x)^2) - (E(f(hX+x))^2 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} (f(u+x))^2 du - (S_x(h))^2$$

Enfin avec un dernier théorème de transfert :

$$E(hXf(hX+x)) = \int_{-1}^{1} htf(ht+x)1/2dt = \frac{h^2}{3} \times \frac{3}{2h}\int_{-1}^{1} tf(ht+x)dt = \frac{h^2}{3}G_x(h)$$

toujours d'après la question 1)c).

Comme $E(hX) = hE(X) = 0$, on a à nouveau avec Koenig-Huyghens mais sur la covariance :

$$\text{cov}(hX, f(hX+x)) = E(hXf(hX+x) = \frac{h^2}{3}G_x(h)$$

9. (a) Comme f est paire on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = f(t)$.

On dérive cette relation : en tout point x tel que f est dérivable en x, f est dérivable en $-x$ et :

$$-f'(-x) = f'(x)$$

Enfin on prend ce résultat en $x = 0$ (ici f est bien dérivable en 0) :

$$-f'(0) = f'(0) \Longrightarrow 2f'(0) = 0 \Longrightarrow f'(0) = 0.$$

De plus la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire, calculons alors $G_0(h)$:

$$G_0(h) = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} tf(t)\ dt = 0$$

et on en déduit que $\text{cov}(hX, f(hX)) = 0$ puis $r_0(h) = 0$.

(b) f est dérivable et $f'(t) = nt^{n-1}$. Donc si $n = 1$, $f'(0) = 1$, sinon $f'(0) = 0$.

On reprend la question 2b (avec n impair) :

$$\text{cov}(hX, f(hX)) = \frac{h^2}{3}G_0(h) = \frac{h^{n+1}}{n+2} \quad \text{et} \quad S_0(h) = 0$$

ce qui donne (avec $2n$ pair et en reconnaissant $S_0(h)$ pour $g(t) = t^{2n}$:

$$V(f(hX)) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t^{2n}dt - 0^2 = \frac{h^{2n}}{2n+1}$$

et enfin :

$$r_0(h) = \frac{\frac{h^{n+1}}{n+2}}{\sqrt{\frac{h^2}{3} \times \frac{h^{2n}}{2n+1}}} = \frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2}$$

10. (a) Dans 5d, on a montré que $\lim_{h\to 0} G_x(h) = f'(x) \neq 0$ donc d'après 8b :

$$\operatorname{cov}(hX, f(hX+x)) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2}{3} f'(x)$$

(b) $f(x) = 0$ donc on a :

$$f(x+t) = tf'(x) + tv_x(t).$$

On remplace :

$$E(f(hX+x)) = S_x(h) = \frac{1}{2h}\left(f'(x)\int_{-h}^{h} t dt + \int_{-h}^{h} tv_x(t)dt\right) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} tv_x(t)dt$$

car on a déjà vu que $\int_{-h}^{h} t\ dt = 0$.

On prend le carré de $f(x+t)$, on a :

$(f(x+t))^2 = (tf'(x)+tv_x(t))^2 = t^2(f'(x)+v_x(t))^2 = t^2[f'(x)^2+v_x(t)^2+2f'(x)v_x(t)] = t^2[f'(x)^2+w_x(t)]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E((f(hX+x))^2) &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}(f(x+t))^2 dt = \frac{1}{2h}\left((f'(x))^2\int_{-h}^{h} t^2 dt + \int_{-h}^{h} t^2 w_x(t))^2 dt\right) \\ &= \frac{h^2}{3}(f'(x))^2 + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t^2 w_x(t))^2 dt \end{aligned}$$

(c) On reprend le même raisonnement qu'aux questions 5c) et 5d).

Soit $\varepsilon > 0$. Comme v_x tend vers 0 en 0, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $t \in [0,\delta]$:

$$|v_x(t)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $h \in [0,\delta]$.

$$\left|\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h} tv_x(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h} t\,|v_x(t)|\,dt \leqslant \varepsilon\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h} tdt = \frac{1}{h^2}\times\frac{h^2\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h} tv_x(t)dt = 0.$$

De même, comme w_x tend vers 0 en 0 (par somme de limites immédiate), il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $t \in [0,\delta]$:

$$|w_x(t)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $h \in [0,\delta]$.

$$\frac{1}{h^3}\left|\int_{-h}^{h} t^2 w_x(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{h^3}\int_{-h}^{h} t^2\,|w_x(t)|\,dt \leqslant \varepsilon\frac{1}{h^3}\int_{-h}^{h} t^2 dt = \frac{1}{h^3}\times\frac{h^3\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3}\int_{-h}^{h} t^2 w_x(t)dt = 0.$$

(d) D'après 10c on obtient les développements limités suivants : au voisinage de 0,

$$E(f(hX+x)) = o(h) \quad \text{et} \quad E((f(hX+x)^2) = \frac{h^2}{3}[f'(x))^2 + o(h^2)]$$

Donc :

$$V(f(hX+x)) = \frac{h^2}{3}(f'(x))^2 + o(h^2) = \frac{h^2}{3}[f'(x)]^2(1+o(1))$$

et comme $(1+o(1)) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 1$ on obtient l'équivalent :

$$V(f(hX+x)) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{h^2}{3}(f'(x))^2$$

(e) Avec les questions précédentes et en composant un équivalent par la racine carrée (ce qui est permis puisque c'est une puissance) :

$$r_x(h) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{h^2}{3}f'(x)}{\sqrt{\frac{h^2}{3}\times\frac{h^2}{3}(f'(x))^2}} = \frac{f'(x)}{|f'(x)|}$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0^+} r_x(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } f'(x)>0 \\ -1 & \text{si } f'(x)<0 \end{cases}$$

11. On se ramène au cas précédent en posant :

$$g(t) = f(t) - f(x)$$

La fonction g vérifie

$$g(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \text{et} \quad g'(t) = f(t) \quad \text{donc } g'(x) = f'(x)$$

De plus on a :

$$V(g(hX+x)) = V(f(hX+x) - f(x)) = V(f(hX+x))$$

et

$$\operatorname{cov}(hX, g(hX+x)) = \operatorname{cov}(hX, f(hX+x)-f(x)) = \operatorname{cov}(hX, f(hX+x)) - f(x)\operatorname{cov}(hX,1) = \operatorname{cov}(hX, f(hX+x))$$

car

$$\operatorname{cov}(hX,1) = E(hX) - E(hX)E(1) = 0.$$

Donc le coefficient de corrélation linéaire $r_x(h)$ est le même pour f et pour g, on a donc le même résultat qu'à la question précédente :

$$\lim_{h\to 0^+} r_x(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } f'(x)>0 \\ -1 & \text{si } f'(x)<0 \end{cases}$$

Partie III. Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur.

12. (a) On obtient sans difficultés :

$$P_0(t) = 1 \quad , \quad P_0'(t) = P_0''(t) = 0.$$

$$P_1(t) = \frac{1}{2}(t^2-1) \quad , \quad P_1'(t) = t \quad , \quad P_1''(t) = 1.$$

$$P_2(t) = \frac{1}{8}(t^2-1)^2 \quad , \quad P_2'(t) = \frac{t(t^2-1)}{2} \quad , \quad P_2''(t) = \frac{3t^2-1}{2}.$$

(b) Le degré d'un produit de polynômes est la somme des degrés donc $\deg(P_n) = 2n$.

La dérivation enlève un au degré, sauf pour une constante qui devient de degré $-\infty$ donc :

$$\forall k \in [\![0;2n]\!], \quad \deg(P_n^{(k)}) = 2n-k \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 2n+1, \quad \deg(P_n^{(k)}) = -\infty.$$

(c) D'après la formule du binôme de Newton, il existe un polynôme Q de degré au plus $2n-1$ tel que :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\left(t^{2n} + Q(t)\right)$$

En dérivant n fois, $Q^{(n)}$ est de degré $n-1$ au maximum et on a :

$$P_n^{(n)}(t) = \frac{2n(2n-1)\times\ldots(n+1)}{2^n n!}t^n + Q^{(n)}(t)$$

et le coefficient dominant de P_n est donc :

$$a_n = \frac{2n(2n-1)\times\ldots(n+1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

En dérivant Q $2n$ fois on obtient 0 donc $P_n^{(2n)}$ est déterminée par la dérivée de son terme dominant :

$$P_n^{(2n)}(t) = \frac{(2n)!}{2^n n!} + Q^{(2n)}(t) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

(d) Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, il existe un polynôme tel que pour tout t réel :

$$P_n^{(k)}(t) = (t^2-1)^{n-k} T_k(t)$$

- **Initialisation** : Pour $k = 0$, avec $T_0 : t \mapsto \frac{1}{2^n n!}$, on a :

$$P_n(t) = (t^2-1)^n T_0(t)$$

et la propriété est vraie au rang $k = 0$.

- **Hérédité** : Soit $k \in [\![0; n-2]\!]$, supposons que pour tout t réel :

$$P_n^{(k)}(t) = (t^2-1)^{n-k} T_k(t)$$

où T_k est un polynôme. On dérive cette relation : pour tout t réel :

$$\begin{aligned} P_n^{(k+1)}(t) &= 2t \times (n-k) \times (t^2-1)^{n-k-1} T_k(t) + (t^2-1)^{n-k} T_k'(t) \\ &= (t^2-1)^{n-k-1} \big(2(n-k)tT_k(t) + (t^2-1)T_k'(t)\big) = (t^2-1)^{n-(k+1)} T_{k+1}(t) \end{aligned}$$

et posant

$$T_{k+1}(t) = (t^2-1)T_k'(t) + 2(n-k)tT_k(t)$$

qui est bien un polynôme.

- **Conclusion** : Pour tout $k \in \ln 0; n-1]\!]$, il existe un polynôme T_k tel que :

$$P_n^{(k)}(t) = (t^2-1)^{n-k} T_k(t)$$

Enfin le degré du produit est la somme des degrés donc :

$$2(n-k) + \deg(T_k) = 2n-k \iff \deg(T_k) = 2n-k-2(n-k) = 2n-k-2n+2k = k.$$

(Remarque : l'obtention du degré de T_k peut être incluse dans la récurrence : on le prouve pour $k = 0$, où T_0 est bien constant, puis pour T_{k+1} dans l'hérédité).

On en déduit, comme $(-1)^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$ que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$:

$$P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0.$$

(e) En utilisant des intégrations par parties successives, on montre par récurrence que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$:

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)\dots(n+k)} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k}(1-t)^{n-k} \, dt$$

Initialisation : L'égalité est évidente pour $k = 0$.

Hérédité Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$ et supposons que :

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)\dots(n+k)} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k}(1-t)^{n-k} \, dt$$

On intègre par parties, avec :

$$u = (1-t)^{n-k} \quad \text{et} \quad v = \frac{(1+t)^{n+k+1}}{n+k+1}$$

qui sont de classe C^1 sur $[-1; 1]$ et :

$$u' = (n-k)(1-t)^{n-k-1} \quad \text{et} \quad v' = (1+t)^{n+k}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k}(1-t)^{n-k} \, dt &= \left[\frac{(1+t)^{n+k+1}}{n+k+1}(1-t)^{n-k}\right]_{-1}^{1} + \frac{n-k}{n+k+1} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k+1}(1-t)^{n-k-1} \, dt \\ &= \frac{n-k}{n+k+1} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k+1}(1-t)^{n-(k+1)} dt \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\ dt = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)\dots(n+k)} \times \frac{n-k}{n+k+1}\int_{-1}^{1}(1+t)^{n+k+1}(1-t)^{n-(k+1)}\ dt$$

Ce qui termine le raisonnement par récurrence.

En particulier pour $k=n$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\ dt &= \frac{n!}{(n+1)\dots(2n)}\int_{-1}^{1}(1+t)^{2n}dt = \frac{n!}{(n+1)\dots(2n+1)} \times \left[\frac{(1+t)^{2n+1}}{2n+1}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2^{2n+1}(n!)}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)} \times \frac{1\times 2\times\dots\times n}{1\times 2\times\dots\times n} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

13. (a) On intègre par parties, avec :

$$u = R(t) \quad \text{et} \quad v = P_n(n-1)(t)$$

qui sont de classe C^1 sur $[-1;1]$ avec :

$$u' = R'(t) \quad \text{et} \quad v' = P_n^{(n)}(t)$$

ce qui donne :

$$\int_{-1}^{1}R(t)P_n^{(n)}(t)\ dt = \left[R(t)P_n^{(n-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}R'(t)P_n^{(n-1)}(t)\ dt$$

Comme $P_n^{(n-1)}(-1) = P_n^{(n-1)}(1) = 0$, on en déduit l'égalité demandée.

(b) On en déduit alors successivement :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}R(t)P_n^{(n)}(t)\ dt &= -\int_{-1}^{1}R'(t)P_n^{(n-1)}(t)\ dt = (-1)^2\int_{-1}^{1}R''(t)P_n^{(n-2)}(t)\ dt \\ &= \dots = (-1)^n\int_{-1}^{1}R^{(n)}(t)P_n^{(n-n)}(t)\ dt = (-1)^n\int_{-1}^{1}R^{(n)}(t)P_n(t)\ dt\end{aligned}$$

(c) Si le degré de R est strictement inférieur à n, $R^{(n)}$ est le polynôme nul donc avec la formule précédente :

$$\int_{-1}^{1}R(t)P_n^{(n)}(t)\ dt = (-1)^n\int_{-1}^{1}R^{(n)}(t)P_n(t)\ dt = 0$$

(d) On applique 13b avec $R = P_n^{(n)}$:

$$\int_{-1}^{1}(P_n^{(n)}(t))^2\ dt = (-1)^n\int_{-1}^{1}P_n^{(2n)}(t)P_n(t)\ dt$$

D'après 12c :

$$\int_{-1}^{1}(P_n^{(n)}(t))^2\ dt = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\int_{-1}^{1}P_n(t)\ dt$$

Or on peut écrire :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}[-(1-t^2)]^n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-t^2)^n.$$

D'après 12e :

$$\int_{-1}^{1}P_n(t)\ dt = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\ dt = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = (-1)^n\frac{2^{n+1}\times n!}{(2n+1)!}$$

On en déduit :

$$\int_{-1}^{1}(P_n^{(n)}(t))^2\ dt = \frac{(2n)!}{2^n n!} \times \frac{2^{n+1}\times n!}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

14. (a) Pour $n = 0$, on obtient :

$$\frac{1!}{2^1 h^0 0!} \int_{-1}^{1} f(x+ht) P_0(t)\ dt = S_x(h)$$

Donc d'après la question 4), sa limite en 0^+ est

$$L_0(x) = f(x).$$

De même

$$\frac{3!}{2^2 h^1 1!} \int_{-1}^{1} f(x+ht) P_1'(t) dt = G_x(h)$$

donc d'après la question 5), sa limite en 0^+ est

$$L_1(x) = f'(x).$$

(b) La formule établie en 13b, reste valable si R est une fonction de classe C^∞. On applique donc cette formule avec $R\ : t \mapsto f(x+ht)$.

Par une récurrence immédiate on obtient :

$$R^{(n)}(t) = h^n f^{(n)}(x+ht)$$

Donc :

$$\int_{-1}^{1} f(x+ht) P_n^{(n)}(t)\ dt = \frac{h^n}{2^n n!} \int_{-1}^{1} f^{(n)}(x+ht) \times (1-t^2)^n\ dt$$

(c) Par la question 5, il existe une fonction v_x continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x+t) = f^{(n)}(x) + t f^{(n+1)}(x) + t v_x(t)$$

Donc en l'appliquant en $t' = ht$:

$$\int_{-1}^{1} \left(f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x)\right)(1-t^2)^n\ dt = \int_{-1}^{1} ht \left(f^{(n+1)}(x) + v_x(ht)\right)(1-t^2)^n\ dt$$

Or la fonction $t \to f^{(n+1)}(x) + v_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-1;1]$: elle est continue sur le segment $[-1;1]$ donc bornée ce qui donne :

$$\forall t \in [-1;1]\ ,\quad m \leqslant f^{(n+1)}(x) v_x(t) \leqslant M$$

Pour $h \leqslant 1$ (possible puisque on s'intéresse à $h \to 0^+$) on a :

$$\forall t \in -1 \leqslant ht \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad m \leqslant f^{(n+1)}(x) + v_x(ht) \leqslant M$$

puis on multiplie cet encadrement par $ht(1-t^2)^n$ qui est positif sur $[0;1]$ et négatif sur $[-1;0]$:

$$\forall t \in [-1;0]\ ,\quad Mht(1-t^2)^n \leqslant ht\left(f^{(n+1)}(x) + v_x(ht)\right)(1-t^2)^n \leqslant mhtv_x(ht)(1-t^2)^n$$

$$\forall t \in [0;1]\ ,\quad mht(1-t^2)^n \leqslant ht\left(f^{(n+1)}(x) + v_x(ht)\right)(1-t^2)^n \leqslant Mhtv_x(ht)(1-t^2)^n$$

On intègre ces inégalités avec les bornes dans l'ordre croissant, on obtient :

$$Mh \int_{-1}^{0} t(1-t^2)^n\ dt \leqslant \int_{-1}^{0} ht\left(f^{(n+1)}(x) + v_x(ht)\right)(1-t^2)^n\ dt \leqslant mh \int_{-1}^{0} t(1-t^2)^n\ dt$$

$$mh \int_{0}^{1} t(1-t^2)^n\ dt \leqslant \int_{0}^{1} ht\left(f^{(n+1)}(x) + v_x(ht)\right)(1-t^2)^n\ dt \leqslant mh \int_{0}^{1} t(1-t^2)^n\ dt$$

Or les intégrales qui encadrent ne dépendent pas de h donc sont des constantes, donc les côtés gauche et droit de chaque encadrement tendent vers 0, et par théorème d'encadrement les deux intégrales au centre tendent vers 0, et enfin leur somme tend vers 0 donc :

$$\int_{-1}^{1} \left(f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x)\right)(1-t^2)^n\ dt = \int_{-1}^{1} ht\left(f^{(n+1)}(x) + v_x(ht)\right)(1-t^2)^n\ dt \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$$

Par suite, on en déduit que :

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x+ht)(1-t^2)^n\ dt = f^{(n)}(x)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\ dt = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}f^{(n)}(x)$$

D'après 14b :

$$\begin{aligned}\frac{(2n+1)!}{2^{n+1}h^n n!}\int_{-1}^{1} f(x+ht)P_n^{(n)}(t)\ dt &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x+ht)(1-t^2)^n\ dt \\ &\xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\times\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}f^{(n)}(x)\end{aligned}$$

Donc $L_n(x)$ existe et

$$L_n(x) = f^{(n)}(x).$$

15. (a) On a vu précédemment que pour tout k, $\deg(P_k^{(k)}) = k$; on va se servir de cette propriété pour obtenir la liberté :

Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P_i^{(i)} = 0$$

On dérive n fois cette égalité il reste (tous les autres polynômes sont de degré strictement inférieurs à n :

$$\lambda_n P_n^{(2n)} = 0$$

et on a vu que $P_n^{(2n)}$ est une constante non nulle, donc on obtient $\lambda_n = 0$.

On dérive alors l'égalité de départ $(n-1)$ fois et on obtient $\lambda_{n-1} = 0$, et en réalisant cette opération à chaque fois il reste finalement :

$$\lambda_0 P_0 = 0$$

avec $P_0 \neq 0$, donc $\lambda_0 = 0$.

enfin la famille est libre et constituée de $(n+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque : on peut éviter le recours à l'itération : on suppose que les λ_i ne sont pas tous nuls et on pose k le plus grand indice i tel que $\lambda_i \neq 0$, on dérive k fois et on obtient $\lambda_k = 0$, ce qui est absurde.

(b) Par linéarité de l'intégrale, en écrivant le carré comme un produit :

$$\int_{-1}^{1}(Q_n(t))^2\ dt = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_k a_j \int_{-1}^{1} P_k^{(k)}(t)P_j^{(j)}(t)\ dt$$

D'après 13c), si $k < j$, en posant $R = P_k^{(k)}$ qui est de degré strictement inférieur à j, l'intégrale est nulle.

De même l'intégrale est nulle si $k > j$ en posant $R = P_j^{(j)}$, on obtient alors :

$$\int_{-1}^{1}(Q_n(t))^2\ dt = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \int_{-1}^{1}\left[P_k^{(k)}(t)\right]^2\ dt$$

D'après 13d :

$$\int_{-1}^{1}(P_k^{(k)}(t))^2 dt = \frac{2}{2k+1}$$

Donc :

$$\int_{-1}^{1}(Q_n(t))^2 dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}a_k^2$$

(c) On développe :

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^{1} (f(x+\alpha t))^2 \ dt - 2\int_{-1}^{1} f(x+\alpha t)Q_n(t) \ dt + \int_{-1}^{1} (Q_n(t))^2 \ dt$$

On exprime le deuxième terme en fonction des y_k :

$$\int_{-1}^{1} f(x+\alpha t)Q_n(t) \ dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} f(x+\alpha t)P_k^{(k)}(t) \ dt = \sum_{k=0}^{n} a_k y_k$$

ce qui donne en utilisant 15b :

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^{1} (f(x+\alpha t))^2 \ dt - 2\sum_{k=0}^{n} a_k y_k + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} a_k^2$$

Enfin on développe également le résultat cherché :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}\left(a_k - \frac{2k+1}{2}y_k\right)^2 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}a_k^2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}\left(\frac{2k+1}{2}y_k\right)^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{2k+1} \times a_k \times \frac{2k+1}{2}y_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}a_k^2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}y_k^2 - 2\sum_{k=0}^{n} a_k y_k
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$-2\sum_{k=0}^{n} a_k y_k + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}a_k^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}\left(a_k - \frac{2k+1}{2}y_k\right)^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}y_k^2$$

et enfin :

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^{1} (f(x+\alpha t))^2 dt + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}\left(a_k - \frac{2k+1}{2}y_k\right)^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}y_k^2$$

(d) $\forall Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$, un carré étant positif, on a :

$$\Phi_n(Q_n) \geqslant \int_{-1}^{1} (f(x+\alpha t))^2 dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}y_k^2 = \Phi_n(Q_n^*)$$

à condition de poser Q_n^* tel que la somme de carrés soit nulle, ce qui donne :

$$\forall k \in [\![0;n]\!] \ , \quad a_k^* = \frac{2k+1}{2}y_k$$

et Q_n^* réalise bien le minimum de $\Phi_n(Q_n)$.