DS3

Exercice 1

On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbf{R}$ définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par :

$$f(x) = e^x - \mathrm{e}\ln(x)$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7$$

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de f' avec la limite de f' en 0 et la limite de f' en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.
2. Dresser le tableau de variations de f avec la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$ et préciser $f(1)$.
3. Tracer la courbe représentative de f.
4. (a) Etudier les variations de la fonction $u :]0;+\infty[\to \mathbf{R}, \quad x \mapsto f'(x) - x$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

Partie II : Etude d'une suite, étude d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

5. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
6. (a) Etudier les variations, puis le signe, de la fonction $g : [2;+\infty[\to \mathbf{R}, \quad x \mapsto f(x) - x$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
7. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet $+\infty$ pour limite.
8. Ecrire un programme en Scilab qui, étant donné un réel A, renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geqslant A$.
9. (a) Démontrer : $\quad \forall x \in [2;+\infty[, \quad 2\ln(x) \leqslant x \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$
   (b) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} \geqslant \dfrac{6-\mathrm{e}}{2} u_n$.
   (c) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Partie III : Étude d'intégrales généralisées

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ converge et calculer cette intégrale.
11. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge-t-elle ?
12. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}dx$ converge.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F :]1;+\infty[^2 \to \mathbf{R}$, de classe C^2 sur l'ouvert $]1;+\infty[^2$, définie pour tout (x,y) de $]1;+\infty[^2$ par :

$$F(x,y) = f(x) + f(y) - xy$$

13. Montrer que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (α,α), le réel α ayant été défini à la question 4 de la partie I.
14. (a) Déterminer la matrice hessienne de F en (α,α).
   (b) La fonction F admet-elle un extremum local en (α,α) ? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

Exercice 2

On note $E = \mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.

Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$ et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \qquad b(P) = P - P', \qquad c(P) = 2XP - (X^2 - 1)P'$$

Par exemple, $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.

Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.
2. (a) Montrer que la matrice de A de a dans la base $\mathcal{B}$ de E est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Déterminer le rang de la matrice A.
3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.

On note B et C les matrices, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $\quad b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.
5. (a) Montrer que b admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci.

   (b) L'endomorphisme b est-il diagonalisable ?

Partie III : Étude de c

6. Montrer : $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?
8. (a) Déterminer une matrice R, carrée d'ordre 3, inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D, carrée d'ordre trois, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

   (b) En déduire que l'endomorphisme c est diagonalisable et déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de c.

Partie IV : Étude de f

9. Montrer que $\quad \forall P \in E, \quad f(P) = P'$.
10. En déduire : $\quad (BA - AB)^3 = 0$.

Exercice 3

Notation : *Dans ce sujet, on note $P(B/A)$ la probabilité de l'évènement B , sachant l'évènement A. Autrement dit : $P(B/A) = P_A(B)$.*

Sous diverses hypothèses, l'exercice étudie différentes situations probabilistes concernant une entreprise de construction produisant des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.

Partie 1.

On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. La probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est 0.1 alors que la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est 0.2.

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Calculer la probabilité de l'évènement "l'objet provient de la chaîne A" .
2. **Informatique :**
   (a) Recopier et compléter (à l'aide de la fonction `rand()`) le programme suivant qui mémorise dans la variable `d` le nombre d'objets défectueux construits au cours de 100000 constructions d'objets par l'entreprise.

```
d=0
for i=1:100000 do
    if rand()<0.6 then
        if ********** then
           d=d+1
        end
    else
        if ********** then
            d=d+1
        end
    end
end
```

   (b) Rajouter une instruction à la fin du programme de façon à afficher une valeur approchée de la probabilité qu'un objet construit par l'entreprise soir défectueux.
   (c) On modifie le programme précédent (les **** sont les mêmes instructions que précédemment) de la façon suivante :

```
d=0
a=0
for i=1:100000 do
    if rand()<0.6 then
        if ********* then
            a=a+1
            d=d+1
        end
    else
        if ********* then
            d=d+1
        end
    end
end
f1=a/100000
f2=d/100000
disp(f1/f2)
```

   Indiquer quel est l'évènement dont la fréquence est calculée dans la variable `f1` et quel est l'évènement dont la fréquence est calculée dans la variable `f2`.
   Le nombre affiché $(f1/f2)$ sera proche de quelle valeur ?
3. On suppose de plus que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.

On considère la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

(a) i. Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

ii. Ecrire une instruction en Scilab, utilisant la commande '`grand`', qui effectue 1000 simulations de la variable Y.

(b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $P[X = k/Y = n]$. (On distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$).

(c) En déduire, en utilisant le système complet d'évènements $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

Partie 2.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ f(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire Z.
2. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.
3. Justifier la convergence de l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} dt$$
La calculer en effectuant le changement de variable $u = t + 1$.
4. Prouver que Z admet une espérance et la déterminer.
5. Z admet-elle une variance ?
6. Dans cette partie, on suppose que le temps de fabrication, exprimé en minutes d'une pièce par la chaîne A (respectivement B) est une variable aléatoire Z_1 (respectivement Z_2) où Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que que Z.

(a) On considère les évènements :
$C =$ "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaîne B est supérieur à 2 minutes".
$D =$ "le temps de fabrication d'une pièce sur la chaîne B est inférieur à 3 minutes".
Calculer les probabilités suivante : $P(C), P(D), P(D/C)$.

(b) On note $T = \max(Z_1, Z_2)$ et G_T la fonction de répartition de T.

i. Exprimer l'évènement $(T \leqslant x)$ en fonction des évènements $(Z_1 \leqslant x)$ et $(Z_2 \leqslant x)$.

ii. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_T(x) = [F_Z(x)]^2$$

(c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

Partie 3.
On suppose maintenant que pour qu'une pièce soit terminée, il faut qu'elle passe par la chaîne A puis par la chaîne B.
Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne A est une variable aléatoire M suivant une loi exponentielle de paramètre 2.
Le temps de passage exprimé en minutes pour un objet sur la chaîne B est une variable aléatoire N suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.
Les variables M et N sont indépendantes.

1. Rappeler l'expression d'une densité de probabilité v de M et d'une densité w de N.
2. On note S la variable aléatoire représentant le temps total de fabrication d'une pièce.
Exprimer S en fonction de M et de N et déterminer le temps moyen de fabrication d'une pièce.