Corrigé du DS n° 3

Exercice 1. : eml 2017

Partie I.

1. (a) f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ par opérations élémentaires, avec $x > 0$ pour le logarithme. De plus, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f'(x) = e^x - \frac{e}{x} \quad \text{puis} \quad f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2}$$

(b) $f''(x)$ est clairement strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$ comme somme de deux termes strictement positifs, donc f' est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus on a :

- $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par opérations élémentaires,

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par opérations élémentaires,

$$\lim_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$$

- $f'(1) = e - \frac{e}{1} = 0$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

2. On en déduit sans difficulté le signe de f' puis les variations de f. Restent les limites de f et $f(1)$:

- $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc par opérations élémentaires,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ donc on a une forme indéterminée sur une somme, on factorise par le terme prépondérant :

$$f(x) = e^x\left(1 - e\frac{\ln x}{e^x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} e^x \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$$

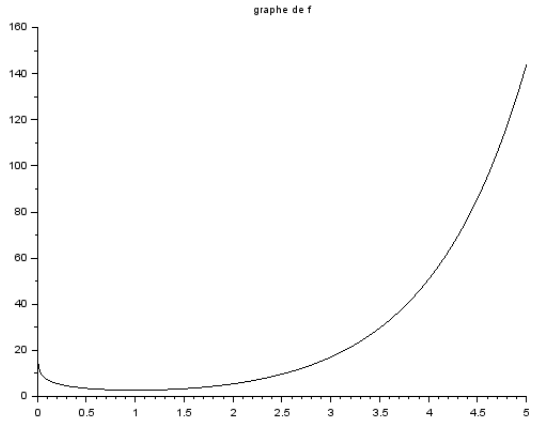
car par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$.

- $f(1) = e - e \times \ln(1) = e - e \times 0 = e$.

Enfin on en déduit le tableau de variations de f complet :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

3. En $+\infty$,$\ln(x)$ est négligeable devant e^x donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x$ et f a une "allure exponentielle " en $+\infty$.
La courbe représentative de f :



4. (a) u est dérivable par opérations élémentaires et pour tout $x > 0$,

$$u'(x) = f''(x) - 1 = e^x + \frac{e}{x^2} - 1 = \frac{x^2e^x - x^2 + e}{x^2}$$

Il reste à étudier le signe du numérateur. Deux possibilités, l'une plus fine mais très rapide, l'autre beaucoup plus lourde :

- Première possibilité : on remarque que pour $x > 0$, $e^x > 1$ donc $e^x - 1 > 0$. Le numérateur est alors clairement strictement positif, et $u'(x)$ également.
- Deuxième possibilité : si on ne voit pas cette positivité de $e^x - 1$, ne pouvant sommer les signes, on doit étudier les variations du numérateur. Posons $g(x) = x^2e^x - x^2 + e$ pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, g est dérivable par opérations élémentaires et :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = 2xe^x + x^2e^x - 2x = x(2e^x + xe^x - 2)$$

Si on n'a pas vu la première fois que $e^x > 1$ permet de conclure, on ne devrait pas le voir ici, et on pose $h(x) = 2e^x + xe^x - 2$ sur $\mathbf{R}_+^*$, de nouveau dérivable, avec :

$$\forall x > 0,\ h'(x) = 2e^x + e^x + xe^x > 0$$

h est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, et de plus $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 2e^0 + 0e^0 - 2 = 2 - 2 = 0$.

On en déduit que $h(x) > 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$, donc par produit $g'(x) > 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et g y est strictement croissante.

Enfin $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0e^0 - 0 + e = e$ donc $g(x) > e > 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et enfin $u'(x)$ est également strictement positive.

On en déduit finalement que u est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

(b) L'équation posée est équivalente à l'équation $u(x) = 0$, de la forme $u(x) = constante$ dont le nombre de solutions est donnée par le théorème de bijection.

On a vu que u est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathrm{Im}(u) = \left]\lim\limits_{x\to 0} u(x), \lim\limits_{x\to +\infty} u(x)\right[$.

L'équation $u(x) = 0$ a alors une unique solution sur $]0, +\infty[$ si $0 \in \mathrm{Im}(u)$, aucune sinon. Déterminons alors les limites :

- On a vu que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ donc par opérations élémentaires :

$$\lim_{x\to 0} u(x) = -\infty$$

- On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc on a une forme indéterminée sur une somme, on factorise par le terme prépondérant :

$$f'(x) - x = e^x - \frac{e}{x^2} - x = e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) - \frac{e}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \times 1 - 0 = +\infty$$

car par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Enfin on en déduit que $\mathrm{Im}(u) =]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$, donc $0 \in \mathrm{Im}(u)$, et l'équation $u(x) = 0$, et par suite l'équation équivalente $f'(x) = x$, admettent une unique solution sur $]0, +\infty[$, qu'on note α comme l'indique l'énoncé.

Reste à prouver l'encadrement de α : celui-ci étant défini implicitement par la $u(\alpha) = 0$, on s'intéresse aux images par u : On a

$$u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 \quad , \quad u(\alpha) = 0 \quad , \quad u(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 2 = \frac{2e^2 - e - 4}{2}$$

Comparons ces quantités : on a immédiatement $u(1) < u(\alpha)$, et comme u est strictement croissante, on en déduit que $1 < \alpha$.

En revanche il est un peu plus difficile de comparer $u(2)$ et $u(\alpha)$. Pour comparer le numérateur avec 0, remarquons que $7,3 < e^2 < 7,4$ donc $14,6 < 2e^2 < 14,8$ d'une part, et d'autre part que $-2,8 < -e < -2,7$. On additionne ces inégalités puis on retire 4 et on obtient :

$$11,8 < 2e^2 - e < 12,1 \quad \text{et enfin} \quad 7,8 < 2e^2 - e - 4 < 8,1$$

(remarquons que le côté droit des différentes inégalités est inutile puisqu'on veut seulement minorer par 0)
ce qui permet d'assurer que $u(2) > 0$ comme quotient de deux nombres strictement positifs, puis que $u(2) > u(\alpha)$ et par stricte croissance de u on obtient finalement comme demandé :

$$1 < \alpha < 2$$

Partie II.

5. Pour que la suite existe, il faut que chaque terme puisse être calculé : la suite est définie par récurrence, on va donc le vérifier par récurrence en même temps que l'inégalité souhaitée.

   - **Initialisation** : u_0 est bien défini et vaut 2, donc on a bien $u_0 \geqslant 2$ et la propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : on suppose que u_n existe et que $u_n \geqslant 2$ pour un certain n ; montrons que cela implique que u_{n+1} existe et que $u_{n+1} \geqslant 2$.

     u_{n+1} est défini par $u_{n+1} = f(u_n)$; or u_n existe, et u_n appartient au domaine de définition de f, $]0, +\infty[$, puisqu'il est supérieur à 2, donc on peut bien calculer $f(u_n)$ et u_{n+1} existe bien.

     De plus on sait que $u_n \geqslant 2$, en composant par f strictement croissante sur $[1, +\infty[$ on en déduit que $f(u_n) \geqslant f(2) = e^2 - e\ln(2)$. Pour comparer cette valeur avec 2, utilisons les données de l'énoncé :

     $$2,7 < e < 2,8 \quad \text{et} \quad 0,6 < \ln 2 < 0,7 \quad \text{donc par produit} \quad 1,62 < e \times \ln(2) < 1,96$$

     puis $-1,96 < -e \times \ln(2) < -1,62$; de plus $7,3 < e^2 < 7,4$ donc en additionnant :

     $$5,34 < e^2 - e \times \ln(2) = f(2) < 5,78$$

     (remarquons que le côté droit des inégalités est inutile puisqu'on veut seulement minorer par 2)
     et on en déduit finalement que $u_{n+1} \geqslant f(2) > 2$, et la propriété au rang n implique bien la propriété au rang $n+1$.
   - **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

6. (a) g est dérivable sur $[2, +\infty[$ par opérations élémentaires, et :

$$\forall x \geqslant 2,\ \ g'(x) = f'(x) - 1 = e^x - \frac{e}{x} - 1$$

Deux possibilités pour étudier le signe de $g'(x)$:

- On peut essayer de se servir des variations de f' pour la minorer : on a vu que f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc pour $x \geqslant 2$, $f'(x) \geqslant f'(2)$. Or on a :

$$f'(2) = e^2 - \frac{e}{2} > 7,3 - \frac{2,8}{2} = 7,3 - 1,4 = 5,9$$

d'après les données de l'énoncé, donc pour tout $x \geqslant 2$,

$$g'(x) = f'(x) - 1 \geqslant f'(2) - 1 \geqslant 5,9 - 1 = 4,9 > 0$$

- On peut prendre la forme explicitée de g', $g'(x) = e^x - \frac{e}{x} - 1$ et étudier ses variations : g' est dérivable par opérations élémentaires, et pour tout $x \geqslant 2$,

$$g''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > 0$$

donc g' est strictement croissante. Reste à calculer $g'(2)$:

$$g'(2) = e^2 - \frac{e}{2} - 1 > 7,3 - \frac{2,8}{2} - 1 = 7,9 - 1,4 - 1 = 4,9$$

donc pour tout $x \geqslant 2$, $g'(x) \geqslant g'(2) > 4,9 > 0$.

Quelle que soit la méthode, on obtient finalement que g est strictement croissante sur sur $[2, +\infty[$.

Reste à étudier son signe, commençons par chercher la valeur de $g(2)$ et son signe :

$$g(2) = f(2) - 2 = e^2 - e \times \ln 2 - 2$$

On a vu plus haut (question 5) que $f(2) > 5,34$, on en déduit donc que $g(2) > 5,34 - 2 = 3,34 > 0$ et comme g est strictement croissante, g est strictement positive sur $[2, +\infty[$.

(b) Comme $u_n \geqslant 2$ pour tout n, on en déduit en posant $x = u_n$ que :

$$\forall n \geqslant 0,\ g(u_n) > 0, \quad \text{c'est à dire} \quad f(u_n) - u_n > 0$$

On en déduit donc que $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n, la suite (u_n) est bien croissante.

7. La suite (u_n) est croissante donc elle a deux comportements possibles : elle peut diverger vers $+\infty$, ou converger vers une limite finie si elle admet un majorant.

Or si elle admettait une limite finie ℓ, par continuité de la fonction f l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ donnerait à la limite $f(\ell) = \ell$ ou encore $g(\ell) = 0$.

De plus comme $u_n \geqslant 2$, on aurait également $\ell \geqslant 2$, et on a vu que g est strictement positive sur $[2, +\infty[$, l'égalité $g(\ell) = 0$ est donc absurde.

On en déduit que g ne peut avoir de limite finie, et comme elle est croissante elle diverge bien vers $+\infty$.

8.
```
function y=f(x)
   y=exp(x)-exp(1)*log(x)
endfunction
A=input('Donner la valeur de A')
u=2 , N=0
while (u<A) do
   u=f(u)
   N=N+1
end
disp(N)
```

Remarque : si l'utilisation d'une fonction f donne un programme plus clair, elle n'est pas nécessaire pour répondre à la question : on peut retirer la définition de la fonction f et remplacer l'instruction `u=f(u)` par `u=exp(u)-exp(1)*log(u)`.

9. (a) Montrons séparément les deux inégalités demandées et essayant de comparer les quantités données.

- Pour la première, les deux côtés sont trop différents pour les comparer directement. Deux possibilités pour s'en sortir : utiliser la concavité du logarithme pour "remplacer" $\ln x$ par $x-1$, ou essayer d'étudier le signe de la différence.

  La concavité du logarithme échoue : elle donne $2\ln x \leqslant 2x-2$, mais comme on a $2x-2 \geqslant x$ pour $x \geqslant 2$, cela ne permet pas de conclure. On doit donc au signe de la différence.

  On s'intéresse alors au signe de la différence $x - 2\ln x$, et on ne peut rien factoriser. Etudions donc la fonction $h(x) = x - 2\ln x$ sur $[2, +\infty[$.

  h est dérivable par opérations élémentaires, et pour tout $x \geqslant 2$,

  $$h'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x} \geqslant 0.$$

  h est donc croissante sur $[2, +\infty[$, et $h(2) = 2 - 2\ln 2 > 2 - 2 \times 0,7 = 0,6 > 0$ donc h est strictement positive sur $[2, +\infty$. On en déduit donc finalement que :

  $$\forall x \geqslant 2, \quad 2\ln x \leqslant x$$

- Même principe pour la seconde inégalité : on ne peut comparer les deux côtés directement, on peut essayer de "remplacer" e^x par $x+1$ avec la convexité de l'exponentielle ou s'intéresser au signe de la différence.

  La convexité de l'exponentielle donne $\frac{e^x}{3} \geqslant \frac{x+1}{3}$, qu'on peut comparer à $x = \frac{x+2x}{3}$; mais avec $2x \geqslant 4$, on obtient $x \geqslant \frac{x+1}{3}$ et on ne peut pas conclure.

  On s'intéresse donc au signe de la différence, qu'on ne peut factoriser, on pose alors la fonction $j(x) = \frac{e^x}{3} - x$ sur $[2, +\infty[$, j est dérivable et :

  $$\forall x \geqslant 2, \quad j'(x) = \frac{e^x}{3} - 1 \geqslant \frac{e^2}{3} - 1 > \frac{7,3}{3} - 1 > \frac{3}{3} - 1 = 0$$

  donc j est strictement croissante sur $[2, +\infty[$ et $j(2) = \frac{e^2}{3} - 2 > \frac{7,3}{3} - 2 > \frac{6}{3} - 2 = 0$ donc j est strictement positive sur $[2, +\infty[$. On en déduit bien l'inégalité recherchée.

En rassemblant avec la précédente on a finalement :

$$\forall x \in [2, +\infty[, \quad 2\ln x \leqslant x \leqslant \frac{e^x}{3}.$$

(b) On veut comparer u_{n+1} à une expression avec u_n ; avant de se lancer dans une récurrence peu évidente, essayons de remplacer u_{n+1} par son expression en fonction de u_n.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on sait que $u_{n+1} = f(u_n) = e^{u_n} - e\ln(u_n)$.

Utilisons la question précédente pour comparer à une quantité sans exponentielle et sans logarithme. Comme $u_n \geqslant 2$ pour tout n, on peut poser $x = u_n$ et on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\ln(u_n) \leqslant \frac{u_n}{2} \quad \text{et} \quad e^{u_n} \geqslant 3u_n$$

ce qui donne ensuite :

$$e^{u_n} \geqslant 3u_n \quad \text{et} \quad -e\ln(u_n) \geqslant -\frac{e}{2}u_n$$

et enfin en additionnant :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ u_{n+1} \geqslant 3u_n - \frac{e}{2}u_n = \left(3 - \frac{e}{2}\right)u_n = \frac{6-e}{2}u_n$$

(c) Question très difficile. La question appelle le théorème de comparaison sur les séries, il faut obtenir une comparaison de $\frac{1}{u_n}$.

La question précédente doit alors faire penser à chercher une comparaison sur u_n avant d'en déduire celle cherchée. Mais la relation précédente concerne u_n et u_{n+1}, pour en déduire une comparaison sur u_n uniquement il faut l'itérer jusqu'à arriver au premier terme de la suite.

La relation précédente donne, en l'itérant : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &\geqslant \frac{6-e}{2} u_{n-1} \\ &\geqslant \frac{6-e}{2} \times \frac{6-e}{2} u_{n-2} = \left(\frac{6-e}{2}\right)^2 u_{n-2} \\ &\geqslant \left(\frac{6-e}{2}\right)^2 \times \frac{6-e}{2} u_{n-3} = \left(\frac{6-e}{2}\right)^3 u_{n-3} \\ &\geqslant \dots \\ &\geqslant \left(\frac{6-e}{2}\right)^n u_{n-n} = \left(\frac{6-e}{2}\right)^n u_0 = 2\left(\frac{6-e}{2}\right)^n \end{aligned}$$

On en déduit ensuite en passant à l'inverse strictement décroissant sur $\mathbf{R}_+^*$ que :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{6-e}\right)^n$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique, étudions sa raison pour obtenir sa convergence ou sa divergence. L'énoncé donne :

$2,7 < e < 2,8$ donc $-2,8 < -e < -2,7$ puis $3,2 < 6-e < 3,3$ et enfin $\dfrac{1}{3,3} < \dfrac{1}{6-e} < \dfrac{1}{3,2}$

Enfin en multipliant par 2 on en déduit que

$$\frac{2}{3,3} < \frac{2}{6-e} < \frac{2}{3,2}$$

Le premier membre est clairement strictement positif et le dernier strictement inférieur à 1, donc on en déduit que

$$0 < \frac{2}{6-e} < 1$$

donc la série de terme général $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{6-e}\right)^n$, et par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n également.

Partie III.

10. Le calcul est demandé, on va donc directement prendre l'intégrale partielle et la convergence viendra avec la valeur.

L'intégrale est généralisée en 0, on considère alors pour $A > 0$:

$$\int_A^1 f(x)\,dx = \int_A^1 (e^x - e\ln x)\,dx = \Big[e^x\Big]_A^1 - e\int_A^1 \ln x\,dx = e - e^A - e\int_A^1 \ln x\,dx$$

Certains candidats connaissent probablement une primitive de $\ln x$ sous la forme $x\ln x - x$, ils peuvent l'utiliser et terminer. Les autres doivent mener une intégration par parties, en posant $u = \ln x$ et $v = x$ de classe C^1, avec $u' = \frac{1}{x}$ et $v' = 1$ et on obtient :

$$\int_A^1 \ln x\,dx = \Big[x\ln x\Big]_A^1 - \int_A^1 x \times \frac{1}{x}\,dx = 1\ln(1) - A\ln A - \int_A^1 1\,dx = -A\ln A - \Big[x\Big]_A^1 = -A\ln A - 1 + A$$

On en déduit alors que :

$$\int_A^1 f(x)\,dx = e - e^A - e(A\ln A - 1 + A) \xrightarrow[A\to 0]{} e - e^0 - e(0-1+0) = e - 1 + e = 2e - 1$$

car par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to 0} A\ln A = 0$. Enfin on en déduit que $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge, et que :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2e-1.$$

11. La question appelle le théorème de comparaison. Sans indication particulière de l'énoncé, on doit commencer par rechercher un équivalent de f en $+\infty$. On factorise la somme par son terme prépondérant :

$$f(x) = e^x - e\ln x = e^x\left(1 - e\frac{\ln x}{e^x}\right) \underset{+\infty}{\sim} e^x$$

car par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$.

D'autre part $\int_1^{+\infty} e^x\,dx$ diverge (de manière évidente puisque c'est l'aire sous la courbe d'une fonction positive et qui tend vers l'infini, ou bien en passant par son intégrale partielle dont le calcul et la limite infinie sont évidents).

Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.

12. L'indication de l'énoncé est une aberration !!! Elle conseille d'effectuer une minoration de $f(x)$ puis une majoration de $\frac{1}{f(x)}$ en se servant de la question 9a., alors que l'équivalent de la question précédente permet de terminer beaucoup plus rapidement.

En effet on a immédiatement :

$$\frac{1}{f(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

et $\int_2^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge (on reconnaît la densité de la loi $\mathcal{E}(1)$, donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{f(x)}\,dx$ converge.

Partie IV.

13. F est de classe C^2, calculons ses dérivées partielles premières : pour tout $(x,y) \in]1,+\infty[^2$,

$$\partial_1(F)(x,y) = f'(x) - y \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(x,y) = f'(y) - x$$

La question donne le point critique à trouver, mais il faut montrer que c'est le seul : il ne suffit donc pas tester le point donné, il faut résoudre le système qui caractérise les points critiques :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1(F)(x,y) = 0 \\ \partial_2(F)(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} f'(x) - y = 0 \\ f'(y) - x = 0 \end{array}\right.$$

La différence de ces deux équations implique $f'(x) - y - f'(y) + x = 0$ et $\underline{f'(x) + x = f'(y) + y}$.
Or pour tout $x \in]1;+\infty[$, $(f'(x)+x)' = f''(x) + 1 > 0$ donc la fonction $x \to f'(x) + x$ est bijective et injective sur $]1;+\infty[$: l'équation $f'(x) + x = f'(y) + y$ implique donc que $\underline{x = y}$.

Le système à résoudre équivaut donc à $\left\{\begin{array}{l} f'(x) = x \\ y = x \end{array}\right.$, dont l'unique solution est le point (α,α) , α étant l'unique solution de $f'(x) = x$ définie à la question 4 de la partie I.

14. (a) On calcule les dérivées partielles secondes de F : pour tout $(x,y) \in]1,+\infty[^2$,

$$\partial^2_{1,1}(F)(x,y) = f''(x) \quad , \quad \partial^2_{1,2}(F)(x,y) = \partial^2_{2,1}(F)(x,y) = -1 \quad , \quad \partial^2_{2,2}(F)(x,y) = f''(y)$$

puis on prend leurs valeurs au points critique (α,α) pour obtenir la Hessienne :

$$H = \begin{pmatrix} f''(\alpha) & -1 \\ -1 & f''(\alpha) \end{pmatrix}$$

On ne calculera explicitement $f''(\alpha)$ que si on en a besoin plus loin.

(b) On cherche les valeurs propres de cette Hessienne, c'est-à-dire les λ réels tels que $H - \lambda I$ n'est pas inversible. Sur une matrice d'ordre 2, le déterminant permet de conclure simplement :

$$\begin{aligned} H - \lambda I = \begin{pmatrix} f''(\alpha) - \lambda & -1 \\ -1 & f''(\alpha) - \lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible } &\iff \left[f''(\alpha) - \lambda\right]^2 - (-1)^2 = 0 \\ &\iff \left[f''(\alpha) - \lambda + (-1)\right] \times \left[f''(\alpha) - \lambda - (-1)\right] = 0 \\ &\iff \lambda = f''(\alpha) - 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = f''(\alpha) + 1 \end{aligned}$$

La deuxième valeur propre est strictement positive car f'' est strictement positive sur $]0, +\infty[$, donc en α. Pour la première il faut avoir trouvé lors de la question précédente (on le remontre ici) que :

$$\forall x > 0,\ f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > 1 + 0 = 1$$

car $e^x > 1$ pour $x > 0$, et $\frac{e}{x^2} > 0$. On en déduit donc que $f''(x) - 1 > 0$ sur $]0, +\infty[$, et donc a fortiori en $x = \alpha$, $f'(\alpha) - 1 > 0$.

Les deux valeurs propres de la Hessienne sont donc strictement positives, et F admet au point critique (α, α) un minimum local.

Exercice 2. : eml 2017

Partie I.

1. Montrons tout d'abord que a est linéaire : pour tous polynômes P_1 et P_2 de $\mathbf{R}_2[X]$ et pour tout λ réel, on a :

$$a(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2) - X(\lambda P_1 + P_2)' = \lambda P_1 + P_2 - X\lambda P_1' - XP_2' = \lambda(P_1 - XP_1') + P_2 - XP_2' = \lambda a(P_1) + a(P_2)$$

et a est bien linéaire. Pour vérifier que c'est un endomorphisme, il reste à vérifier que a est à valeurs dans son espace de départ. Deux possibilités :

- Première possibilité : par les degrés.

  Pour tout P de $\mathbf{R}_2[X]$, on a $\deg(P) \leqslant 2$ donc $\deg(P') \leqslant 1$ et $\deg(XP') \leqslant 2$. Par somme ; $\deg(P - XP') \leqslant 2$, ce qui assure bien que $a(P)$ est élément de $\mathbf{R}_2[X]$.
- Deuxième possibilité : calcul explicite de $a(P)$.

  Soit P quelconque dans $\mathbf{R}_2[X]$, on a $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ et (comme rappelé par l'énoncé) $P' = \beta + 2\gamma X$ donc :

$$a(P) = \alpha + \beta X + \gamma X^2 - X(\beta + 2\gamma X) = \alpha - \gamma X^2$$

  qui est bien élément de $\mathbf{R}_2[X]$.

Quelle que soit la méthode choisie, on conclut finalement que a est un endomorphisme de $E = \mathbf{R}_2[X]$.

2. (a) Il s'agit de calculer les images par a de la base $\mathcal{B}$, puis de les écrire comme combinaisons linéaires de cette même base $\mathcal{B}$:
   - $a(1) = 1 - X \times (1)' = 1 - X \times 0 = 1 = 1 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$.
   - $a(X) = X - X \times (X)' = X - X \times 1 = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2$.
   - $a(X^2) = X^2 - X \times (X^2)' = X^2 - X \times 2X = -X^2 = 0 \times 1 + 0 \times X + (-1) \times X^2$.

   On en déduit bien que :

$$Mat_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   qu'on note donc A.

(b) L'image de A est engendrée par sa première et sa troisième colonne, qui ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre. On obtient donc une base de $\operatorname{Im} A$, et :

$$\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) = 2.$$

3. L'image de A n'est pas de dimension 3, donc celle de a non plus. a n'est donc pas surjective, et a fortiori pas bijective.

En utilisant la base canonique, on a immédiatement :

$$\operatorname{Im}(a) = \operatorname{Vect}[a(1), a(X), a(X^2)] = \operatorname{Vect}(1, 0, -X^2) = \operatorname{Vect}(1, X^2)$$

avec deux vecteurs non colinéaires, donc $\operatorname{Im} a$ est de dimension 2 (déjà vu pour le rang de A d'ailleurs).

Par théorème du rang $\dim(\operatorname{Ker} a) = 1$, et comme on a vu que $a(X) = 0$, X est un élément non nul de $\operatorname{Ker}(a)$, c'est est donc une famille libre, de cardinal 1, donc une base. Enfin on en déduit donc que

$$\operatorname{Ker}(a) = \operatorname{Vect}(X)$$

Remarque : pour la majorité des candidats, cette recherche astucieuse de $\operatorname{Ker}(a)$ est trop difficile ; ils peuvent bien entendu se rabattre sur des calculs matriciels, avec un calcul très simple pour $\operatorname{Ker}(A)$ qui donne $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$ et une conclusion identique sur $\operatorname{Ker}(A)$.

Partie II.

4. Question très difficile. Il y a deux options pour répondre : utiliser, comme l'énoncé semble l'indiquer, et comme il sera nécessaire de le faire à partir de la question suivante, la matrice B ; ou bien revenir aux définitions directes sur des endomorphismes.

- Première méthode : passage aux matrices.

On calcule la matrice B : on s'intéresse aux images par b de la base canonique :

$$b(1) = 1 - 0 = 1 \quad , \quad b(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad b(X^2) = X^2 - 2X$$

donc on obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire, sans 0 sur la diagonale, donc inversible : on en déduit que b est bijectif.

Cherchons maintenant la matrice de b^{-1}, qui d'après le cours est l'inverse de B. Par pivots de Gauss rapides, on obtient :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons d'autre part la matrice de l'endomorphisme $u : Q \mapsto Q + Q' + Q''$:

$$u(1) = 1 + 0 + 0 = 1 \ , \ u(X) = X + 1 = 1 + X \ , \ u(X^2) = X^2 + 2X + 2$$

et on en déduit que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$. u et b^{-1} ayant la même matrice dans la base $\mathcal{B}$, elles sont bien égales et on a donc prouvé que :

$$\forall Q \in E, \ b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$$

Remarque : on peut éviter le calcul de B^{-1} : en calculant immédiatement $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ puis en effectuant son produit avec B, on trouve l'identité ce qui assure que c'est l'inverse de B, et donc la matrice de b^{-1} ; enfin on conclut de même que $b^{-1} = u$.

- Deuxième méthode : raisonnement sur les applications linéaires.

  b étant un endomorphisme en dimension finie, sa bijectivité est équivalente à son injectivité. Cherchons le noyau de b : soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2 \in E$,

$$\begin{aligned} b(P) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad P - P' = 0 \Longleftrightarrow (\alpha - \beta) + (\beta - 2\gamma)X + \gamma X^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} \alpha - \beta & = 0 \\ \beta - 2\gamma & = 0 \\ \gamma & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \quad P = 0 \end{aligned}$$

  donc $\mathrm{Ker}(b) = \{0\}$ et b est injectif, donc bijectif.

  Pour chercher l'expression de b^{-1}, il faudrait résoudre l'équation $b(P) = Q$, ce qui n'est pas possible directement puisqu'on ne peut isoler P dans l'équation (il apparaît deux fois). Cependant puisqu'on sait que b^{-1} existe, il suffit de tester l'expression donnée.

  Posons u la fonction de $\mathbf{R}_2[X]$ qui à Q associe $Q + Q' + Q''$, on a alors : $\forall P \in E$,

$$b \circ u(P) = b(P + P' + P'') = b(P) + b(P') + b(P'') = [P - P'] + [P' - P''] + [P'' - P'''] = P - P'''$$

  Or P est de degré inférieur ou égal à 2, donc nécessairement $P''' = 0$, et donc :

$$\forall P \in E, \;\; b \circ u(P) = P \quad \text{donc} \quad b \circ u = \mathrm{id}$$

  et u est bien la réciproque de b.

5. (a) Il est ici quasiment impératif de déterminer la matrice de b dans la base $\mathcal{B}$; celle-ci est triangulaire donc les valeurs propres de B sont ses éléments diagonaux. On obtient donc :

$$\mathrm{Sp}(b) = \mathrm{Sp}(B) = \{1\}$$

  Donnons tout de même deux possibilités de réponse directement par l'application linéaire : il s'agit de chercher les λ réels pour lesquels il existe un vecteur propre, c'est à dire un polynôme P non nul tel que $b(P) = \lambda P$. Cherchons les P solutions de cette équation en fonction de λ :

$$b(P) = \lambda P \Longleftrightarrow P - P' = \lambda P$$

  Il y a alors deux solutions pour continuer, les mêmes que lorsqu'on a voulu montrer que a était un endomorphisme : poser un P quelconque avec des coefficients réels et identifier, ou bien utiliser les degrés.

  - En identifiant : soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, on a alors :

$$\begin{aligned} b(P) \quad &= \quad \lambda P \Longleftrightarrow (\alpha - \beta) + (\beta - 2\gamma)X + \gamma X^2 = \lambda(\alpha + \beta X + \gamma X^2) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha - \beta = \lambda\alpha \\ \beta - 2\gamma = \lambda\beta \\ \gamma = \lambda\gamma \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rrrl} (1-\lambda)\alpha & -\beta & & = 0 \\ & (1-\lambda)\beta & -2\gamma & = 0 \\ & & (1-\lambda)\gamma & = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

    Ce système triangulaire admet une solution non nulle si et seulement s'il n'est pas de Cramer, donc si et seulement si il admet un coefficient diagonal nul, donc uniquement pour $\lambda = 1$. On en déduit donc que

$$\mathrm{Sp}(b) = \{1\}$$

- En utilisant les degrés. On isole les P d'une côté, les P' de l'autre :

$$b(P) = \lambda P \iff (1-\lambda)P = P'$$

Or, si P est non nul (obligatoire pour que P soit un vecteur propre), le degré de P' est strictement inférieur à celui de P. On en déduit que si $(1-\lambda) \neq 0$, tout vecteur P non nul vérifie $\deg[(1-\lambda)P] = \deg(P) \neq \deg(P')$ donc forcément $(1-\lambda)P \neq P'$: l'équation ne peut donc avoir de solution P non nulle, et λ n'est pas valeur propre.

On en déduit donc que la seule valeur propre possible est $\lambda = 1$, puis pour cette valeur il faut vérifier l'existence de solutions non nulles. On remarque que l'équation devient :

$$b(P) = P \iff 0P = P' \iff P' = 0$$

qui admet bien des solutions non nulles (tous les polynômes constants, par exemple le polynôme 1), donc 1 est bien valeur propre de b et

$$\mathrm{Sp}(b) = \{1\}$$

(b) b admet une unique valeur propre, il y a deux manières de répondre : par un raisonnement classique par l'absurde ou en calculant le sous-espace propre associé.

- Première technique : on suppose que b est diagonalisable, alors B aussi et il existe P inversible et D diagonale, avec une diagonale composée des valeurs propres de B, telles que

$$B = PDP^{-1}$$

Mais comme $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(b) = \{1\}$, on a $D = I$ et $B = PIP^{-1} = I$, absurde, et b n'est donc pas diagonalisable.

- Deuxième technique : On cherche $E_1(B)$, on a :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(B) \iff (B-I)X = 0 \iff \begin{cases} -y \quad = 0 \\ -2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $E_1(B) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$, avec un vecteur non nul donc la famille génératrice de $E_1(B)$ est aussi libre, c'en est une base et $\dim(E_1(B)) = 1$.

Enfin la somme des dimensions des sous-espaces propres de B (qui vaut 1) est différente de l'ordre de B (qui vaut 3), donc B, et par suite b, ne sont pas diagonalisables.

Partie III.

6. On calcule sans difficulté :

$$c(1) = 2X\times 1-(X^2-1)\times 0 = 2X \ , \ c(X) = 2X\times X-(X^2-1)\times 1 = 1+X^2 \ , \ c(X^2) = 2X\times X^2-(X^2-1)\times(2X) = 2X$$

donc on a bien

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. C a deux colonnes égales (ou deux lignes) donc n'est pas inversible : on en déduit que c n'est pas bijectif.

8. (a) Il s'agit de diagonaliser C ; n'ayant aucune information préalable, il faut se lancer dans le calcul

des valeurs propres puis des sous-espaces propres associés :

$$C-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 2 & -\lambda & 2\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{pmatrix}2 & -\lambda & 2\\ -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftarrow 2L_2+\lambda L_1}{\iff} \begin{pmatrix}2 & -\lambda & 2\\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{pmatrix}2 & -\lambda & 2\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 2-\lambda^2 & 2\lambda\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-(2-\lambda^2)L_2}{\iff} \begin{pmatrix}2 & -\lambda & 2\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 0 & 2\lambda+\lambda(2-\lambda^2)\end{pmatrix}$$

On en déduit que $C-\lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$2\lambda+\lambda(2-\lambda^2)=0 \iff \lambda(2+2-\lambda^2)=0 \iff \lambda(4-\lambda^2)=0 \iff \lambda(2-\lambda)(2+\lambda)=0$$

et enfin

$$\mathrm{Sp}(C)=\{0,2,-2\}$$

Reste à déterminer les sous-espaces propres associés. En utilisant la réduite triangulaire obtenue précédemment, on obtient :

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_0(C) \iff CX=0 \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x \quad +2z &= 0\\ y &= 0\\ 0 &= 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x=-z\\ y=0\\ z=z\end{array}\right.$$

donc $E_0(C)=\mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right]=\mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right]$.

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_2(C) \iff (C-2I)X=0 \iff \left\{\begin{array}{r} 2x-2y+2z=0\\ y-2z=0\\ 0=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x=z\\ y=2z\\ z=z\end{array}\right.$$

donc $E_2(C)=\mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right]$.

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_{-2}(C) \iff (C+2I)X=0 \iff \left\{\begin{array}{r} 2x+2y+2z=0\\ y+2z=0\\ 0=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x=z\\ y=-2z\\ z=z\end{array}\right.$$

donc $E_{-2}(C)=\mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right]$.

Enfin on en déduit que la famille $\left[\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right]$ est une base (libre car vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, et de cardinal égal à 3) de $\mathbf{R}^3$ constituée de vecteurs propres de C, respectivement associés aux valeurs propres -2, 0 et 2 donc en posant

$$R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

la formule de changement de base assure bien que $C=RDR^{-1}$.

(b) C est diagonalisable, c l'est donc aussi et on obtient une base de vecteurs propres de c en prenant une base de vecteurs propres de C et en considérant les vecteurs de E dont les coordonnées sont données par les colonnes précédentes. Par exemple la famille

$$(1-2X+X^2, 1-X^2, 1+2X+X^2)$$

est une base de vecteurs propres de c, respectivement associés aux valeurs propres -2, 0 et 2.

Partie IV

9. Il suffit de faire les calculs : pour cela deux possibilités, les faire matriciellement ou sur les applications linéaires :

   - matriciellement : on calcule

   $$Mat_{\mathcal{B}}(f) = BA - AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   d'une part, et $Mat_{\mathcal{B}}(P \mapsto P')$ de l'autre : en notant $v : P \mapsto P'$, on a immédiatement :

   $$v(1) = 0 \ , \ v(X) = 1 \ , \ v(X^2) = 2X$$

   donc $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et donc $f = v$.

   - par les applications linéaires : pour tout P de E, on a :

   $$\begin{aligned} f(P) &= b(a(P)) - a(b(P)) = b(P - XP') - a(P - P') \\ &= b(P) - b(XP') - a(P) + a(P') \\ &= [P - P'] - [XP' - (XP')'] - [P - XP'] + [P' - X(P')'] \\ &= P - P' - XP' + (1 \times P' + X \times P'') - P + XP' + P' - XP'' \\ &= (P - P) + (P' - P') + (XP' - XP') + (XP'' - XP'') + P' \\ &= P' \end{aligned}$$

10. On remarque que $(BA - BA)$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, donc que $(BA - AB)^3$ est la matrice $f^3 = f \circ f \circ f$. Or on remarque que :

    $$\forall P \in E, \ f \circ f \circ f(P) = f \circ f(P') = f(P'') = P''' = 0$$

    car (on l'a vu précédemment) pour tout P de degré inférieur ou égal à 2, $P''' = 0$.

    Enfin puisque f^3 est l'application nulle, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice nulle, ce qui assure bien que :

    $$(AB - BA)^3 = 0$$

    Remarque : le fait même de poser cette question montre que l'énoncé "bannit" la technique matricielle pour la question précédente : en effet si on a déterminé f en calculant $AB - BA$, il est immédiat que $(AB - BA)^3 = 0$ par simple vue de la matrice, qui a clairement une forme nilpotente d'ordre 3.

Exercice 3. : ecricome 2003
Partie 1.

1. Soient les évènements :

   A (resp. B : " l'objet vient de la chaîne A (resp. B) , D : "l'objet est défectueux".

   On cherche

   $$\mathrm{P}_D(A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap D)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}_A(D)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{1}{10}}{\mathrm{P}(D)}$$

   Or

   $$D = (A \cap D) \cup (B \cap D)$$

donc par incompatibilité de la réunion et formule des probabilités composées,

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}_A(D) + \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}_B(D) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{10} = \frac{7}{50}$$

et enfin on obtient :

$$\mathrm{P}_D(A) = \frac{\frac{3}{50}}{\frac{7}{50}} = \frac{3}{50} \times \frac{50}{7} = \frac{3}{7}.$$

2. **Informatique :**

   (a)
```
d=0
for i=1:100000 do
    if rand()<0.6 then
        if rand()<0.1 then
            d=d+1
        end
    else
        if  rand()< 0.2 then
            d=d+1
        end
    end
end
```

   (b) On sait que la fréquence d'un évènement T converge, lorsque le nombre de simulations indépendantes tend vers $+\infty$ vers $P(T)$.
   On va donc afficher la fréquence de l'évènement D définie par $f = \frac{\text{Nombre d'objets défectueux}}{\text{Nombre de simulations}} = \frac{d}{10000}$

```
f=d/100000
disp(f)
```

   (c)
```
d=0
a=0
for i=1:100000 do
    if rand()<0.6 then
        if rand()<0.1 then
            a=a+1
            d=d+1
        end
    else
        if rand()< 0.2 then
            d=d+1
        end
    end
end
f1=a/100000
f2=d/100000
disp(f1/f2)
```

   On remarque que la variable `a` compte (c'est un compteur !) le nombre de fois où le serveur A a été choisi et l'objet est défectueux au cours des 10000 simulations, autrement dit la variable `a` contient l'effectif de l'évènement $A \cap D$.
   $f1$ est donc la fréquence de l'évènement $A \cap D$.
   De même, la variable `d` contient l'effectif de l'évènement D donc f_2 est la fréquence de l'évènement D.

   Ainsi, $\frac{f1}{f2}$ est une valeur approchée de $\frac{P(A\cap D)}{P(D)} = P_D(A) = \frac{3}{7}$.

3. (a) i. Y suit une loi de Poisson de paramètre 20 donc :

$$Y(\Omega) = \mathbf{N} \quad , \quad \forall k \in \mathbf{N},\ \mathrm{P}(Y = k) = \frac{20^k e^{-20}}{k!}$$

   et Y admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(Y) = V(Y) = 20.$$

ii. `grand(1,1000,'poi',20)`

(b) Lorsque $(Y = n)$, chacun des n objets produits a, indépendamment des autres, une probabilité $\frac{1}{10}$ d'être défectueux. On compte donc le nombre de succès lors de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes, de probabilité de succès égale à $\frac{1}{10}$ et on a :

$$(X|[Y = n]) \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{10}\right)$$

donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\mathrm{P}_{(Y=n)}(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^k\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k \geqslant n+1 \end{cases}$$

(c) On voit que X prend toutes les valeurs de 0 à n, avec n qui prend toutes les valeurs de $\mathbf{N}$; donc X prend toutes les valeurs de $\mathbf{N}$:

$$X(\Omega) = \mathbf{N}.$$

Avec le système complet d'évènements $(Y = n)_{n\in\mathbf{N}}$, la formule des probabilités totales permet d'écrire : pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}([X = k] \cap [Y = n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(Y = n)\,\mathrm{P}_{(Y=n)}(X = k) \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{20^n e^{-20}}{n!} \times \binom{n}{k}\left(\frac{1}{10}\right)^k\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} \\
&= e^{-20}\left(\frac{1}{10}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{20^n}{n!} \times \frac{n!}{k! \times (n-k)!}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} = \frac{e^{-20}\left(\frac{1}{10}\right)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{20^n}{(n-k)!}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k} \\
&= \frac{e^{-20}\left(\frac{1}{10}\right)^k}{k!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{20^{p+k}}{p!}\left(\frac{9}{10}\right)^p = \frac{e^{-20}\left(\frac{20}{10}\right)^k}{k!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{20^p}{p!}\left(\frac{9}{10}\right)^p = \frac{e^{-20}2^k}{k!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{18^p}{p!} \\
&= \frac{e^{-20}2^k}{k!} e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!}.
\end{aligned}$$

et X suit bien la loi de Poisson de paramètre 2.

Partie 2.

1. f est positive sur $\mathbf{R}$ car $\frac{2}{(1+t)^3} \geqslant 0$ sur $\mathbf{R}^+$ et $0 \geqslant 0$.

   f est continue sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0, car $t \mapsto \frac{2}{(1+t)^3}$ est continue sur $\mathbf{R}^+$ et $t \mapsto 0$ est continue sur $\mathbf{R}^{-*}$.

   Enfin on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{2}{(1+t)^3}\,dt$$

   La première intégrale converge et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle, et la seconde n'est généralisée qu'en $+\infty$ car $t \to \frac{2}{(1+t)^3}$ est continue sur $[0; +\infty[$. On passe alors par l'intégrale partielle :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{2}{(1+t)^3}\,dt &= \left[\frac{-1}{(1+t)^2}\right]_0^x = \left(-\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1^2}\right) \\
&\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1
\end{aligned}$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1.

On en déduit que f est bien une densité de probabilité.

2. Si $x < 0$,
$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$
Si $x \geqslant 0$, par relation de Chasles
$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{2}{(1+t)^3}\,dt = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$$
(l'intégrale a été calculée à la question précédente). En rassemblant on obtient :
$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. La fonction $t \to \frac{2t}{(1+t)^3}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, et la fonction intégrée est positive.

Cherchons un équivalent de cette fonction au voisinage de $+\infty$:
$$\frac{2t}{(1+t)^3} = \frac{2t}{\left(t\left[1+\frac{1}{t}\right]\right)^3} = \frac{2t}{t^3\left(1+\frac{1}{t}\right)^3} = \frac{2}{t^2\left(1+\frac{1}{t}\right)^3}$$
avec $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^3 = 1$ donc :
$$\frac{2t}{(1+t)^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{t^2}$$
On reconnaît dans cet équivalent une fonction positive, et dont l'intégrale en $+\infty$ converge car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$, donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}$$
est bien convergente.

Pour effectuer le changement de variable indiqué, qui est bien de classe C^1, on se place sur l'intégrale partielle :
$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{2t}{(1+t)^3}\,dt &= \int_1^{x+1} \frac{2(u-1)}{u^3}\,du = 2\int_1^{x+1} \frac{1}{u^2}\,du - 2\int_1^{x+1} \frac{1}{u^3}\,du \\
&= 2\left[-\frac{1}{u}\right]_1^{x+1} - 2\left[\frac{u^{-2}}{-2}\right]_1^{x+1} = 2\left(-\frac{1}{x+1}+1\right) - 2\left(\frac{1}{-2(x+1)^2} - \frac{1}{-2}\right) \\
&= 2 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - 1 = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \\
&\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.
\end{aligned}$$
donc on obtient :
$$\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3} = 1.$$

4. Par relation de Chasles,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}\,dt.$$
La première intégrale converge absolument et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle, et la seconde converge vers 1 d'après la question précédente. De plus c'est l'intégrale d'une fonction

positive donc elle converge absolument.

On en déduit que X admet une espérance, qui vaut :

$$E(X) = 0 + 1 = 1.$$

5. X admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre deux, donc par théorème de transfert puis relation de Chasles, si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t)^3}\, dt.$$

converge absolument.

La première intégrale converge absolument et vaut 0 comme intégrale de la fonction nulle, on s'intéresse à la seconde.

La fonction $t \to \frac{2t^2}{(1+t)^3}$ est continue sur $[0; +\infty[$ donc l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, et la fonction intégrée est positive.

Cherchons un équivalent de cette fonction au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{2t^2}{(1+t)^3} = t \times \frac{2t}{(1+t)^3} \underset{t \to +\infty}{\sim} t \times \frac{2}{t^2} = \frac{2}{t}$$

On reconnaît dans cet équivalent une fonction positive, et dont l'intégrale en $+\infty$ diverge car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 1 \leqslant 1$, donc par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t)^3}$$

est divergente.

Elle n'est donc pas absolument convergente, et X n'admet pas de moment d'ordre deux donc n'admet pas de variance.

6. (a) On se ramène à la fonction de répartition de Z :

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(Z_2 \geqslant 2) = 1 - \mathrm{P}(Z_2 < 2) = 1 - F_Z(2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{(1+2)^2}\right) = \frac{1}{9}.$$

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(Z_2 \leqslant 3) = F_Z(3) = 1 - \frac{1}{4^2} = \frac{15}{16}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_C(D) &= \frac{\mathrm{P}(C \cap D)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{\mathrm{P}(2 \leqslant Z_2 \leqslant 3)}{\frac{1}{9}} = 9\left(\mathrm{P}(Z_2 \leqslant 3) - \mathrm{P}(Z_2 < 2)\right) \\ &= 9\left(\frac{15}{16} - \frac{8}{9}\right) = \frac{15 \times 9}{16} - 8 = \frac{15 \times 9 - 8 \times 16}{16} = \frac{135 - 128}{16} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

(b) i. $(T \leqslant x) = [\max(Z_1, Z_2) \leqslant x]$ signifie que la plus grande des deux variables est inférieure ou égale à x, ce qui est équivalent à dire que les deux variables sont inférieures ou égales à x donc :

$$(T \leqslant x) = (Z_1 \leqslant x) \cap (Z_2 \leqslant x)$$

ii. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on en déduit par indépendance de Z_1 et Z_2 que :

$$G_T(x) = \mathrm{P}(T \leqslant x) = \mathrm{P}\Big((Z_1 \leqslant x) \cap (Z_2 \leqslant x)\Big) = \mathrm{P}(Z_1 \leqslant x)\,\mathrm{P}(Z_2 \leqslant x) = F_Z(x)F_Z(x) = [F_Z(x)]^2$$

(c) F_Z est continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en 0, donc il en est de même pour G_T par composition avec la fonction carré de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ donc sur $[0;1]$.

On en déduit que T est une variable à densité, et on obtient une densité en dérivant $G_T(x) = [F_Z(x)]^2$ sauf au point où elle n'est peut-être pas dérivable où on donne une valeur arbitraire. Or pour tout $x \neq 0$,

$$G_T'(x) = 2f_Z(x)F_Z(x)$$

et on peut prolonger par cette valeur en 0 ce qui donne :

$$g_T(x) = 2f_Z(x)F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4}{(1+x)^3} \times \left(1 - \frac{1}{(1+x)^2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de T.

Partie 3.

1. M et N admettent respectivement pour densité :

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2. Il est évident d'après l'énoncé que

$$S = M + N$$

et M et N admettent une espérance donc par linéarité de l'espérance, S admet une espérance et

$$E(S) = E(M) + E(N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$