DS3 : Edhec

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
L'utilisation de documents, d'une calculatrice ou de tout appareil électronique est strictement interdite.
Les abréviations sont interdites. Les notions doivent être écrites en toutes lettres .
Toute abréviation et toute phrase écrite au crayon à papier ne seront pas lues par le correcteur.

Exercice 1.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer la dimension de $Im(f)$, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $Im(f)$.
   (b) En déduire la dimension de $Ker(f)$ puis donner une base de $Ker(f)$.
2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.
   (a) Ecrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, puis $f(u-v)$ et $f(u+3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.
   (b) En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.
   (c) Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.
3. (a) Etablir la relation suivante : $D(D+I)(D-3I) = 0$.
   (b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est un polynôme annulateur de C.
4. On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n , b_n et c_n tels que :
$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$$
   (a) En utilisant les racines de P, déterminer les valeurs de a_n , b_n et c_n en fonction de n.
   (b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel n non nul, de C^n en fonction de C et C^2.
5. Compléter, à l'aide de matrices de type `zeros` et `ones`, les deux espaces laissés libres dans la commande `Scilab` suivante pour qu'elle permette de construire la matrice C.

```
C = [ones(1,5);---,---;ones(1,5)]
```

Exercice 2.
Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[$, $f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. Etude de f_n.
   (a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$, puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.
   (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
   (c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Etude de la suite (u_n).
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.
3. (a) Utiliser la question 2b pour compléter les commandes Scilab suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0
while -------
n= ------
end
disp(n)
```

   (b) Le script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant 2,3 comme valeur approchée de $\ln 10$.
4. On pose $v_n = u_n - n$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   (b) Etablir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.
   (c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \times e^{-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}}$.
   (d) Déduire de l'encadrement obtenu en **2b** que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. (a) Vérifier que f est une fonction paire.
   (b) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant f comme densité. On note F_X la fonction de répartition de X.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
3. On pose $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $F_Y(x) = F_X(\mathrm{e}^x) - F_X(-\mathrm{e}^x)$.
   (b) Montrer, sans expliciter la fonction F_Y, que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y et vérifier que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.
4. (a) Montrer que, si x est positif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ appartient à $[0, 1[$ et montrer que, si x est strictement négatif, alors $1 - \mathrm{e}^{-x}$ est strictement négatif.
   (b) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = -\ln(1 - U)$ et reconnaître la loi de Z.
   (c) Simulation informatique de la loi de Y. Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```
function y =expo()
      u=
      y=
endfunction
```

<u>Problème</u> : On lance une pièce équilibrée. (la probabilité d'obtenir "pile" et celle d'obtenir "face" étant toutes deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier "pile".

Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, \cdots, k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On décide de coder l'événement ≪obtenir un "pile"≫ par 1 et l'événement ≪obtenir un "face"≫ par 0.

   (a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.

   ```
   Z=1
   while ................   do
         Z= ...............
   end
   disp(Z)
   ```

   (b) Compléter le programme précédent pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X

2. Etablir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

3. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

4. (a) Pour tout couple (i,k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathrm{P}_{[Z=k]}(X=i)$

   (b) En déduire que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(X=i) = \sum\limits_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

   (c) On admet dans cette question que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=i}^{+\infty} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}$. Vérifier que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=i) = 1$

5. (a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $i\mathrm{P}(X=i) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$

   (b) En déduire que X possède une espérance.

   (c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4c), que
   $$E(X) = \frac{3}{2}$$

6. (a) Utiliser le résultat de la question 5a) pour montrer que X a un moment d'ordre 2.

   (b) Etablir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4c), que
   $$E\left(X^2\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

   (c) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

   (d) En déduire la valeur de $E\left(X^2\right)$ et vérifier que $V(X) = \dfrac{11}{12}$.

7. On se propose de calculer $\mathrm{P}(X=1)$, $\mathrm{P}(X=2)$ et $\mathrm{P}(X \geqslant 3)$.

   (a) Ecrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx$

   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx$

   (d) Etablir alors que $\mathrm{P}(X=1) = \ln(2)$ puis donner la valeur de $\mathrm{P}(X=2)$.

   (e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathrm{P}(X \geqslant 3)$, puis donner une valeur approchée de $\mathrm{P}(X \geqslant 3)$ en prenant $\ln 2 \simeq 0,7$.