DS3 Edhec - Correction

Exercice 1 (: edhec 2015). 1. (a)

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}[f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5)] = \mathrm{Vect}[e_1+e_2+e_3+e_4+e_5, e_1+e_5, e_1+e_5, e_1+e_5, e_1+e_5]$$

$$= \mathrm{Vect}[e_1+e_2+e_3+e_4+e_5, e_1+e_5] = \mathrm{Vect}[e_2+e_3+e_4, e_1+e_5](C_1 \leftarrow C_1 - C_2)$$

et la famille $(e_2+e_3+e_4, e_1+e_5)$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$ et libre (deux vecteurs non colinéaires), c'est une base de $\mathrm{Im}\, f$ qui est de dimension 2.

(b) Par théorème du rang, on en déduit que :

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + 2 = \dim(\mathbb{R}^5) = 5 \quad \text{donc} \quad \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3.$$

On peut ensuite déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$ de deux manières différentes : la première, plus subtile, consiste à se servir de la matrice C pour obtenir à vue trois vecteurs de $\mathrm{Ker}\, f$, puis s'assurer qu'ils forment une famille libre et dont le cardinal est égal à celui de $\mathrm{Ker}\, f$ (ici avec $C_2 - C_3 = C_2 - C_4 = C_2 - C_5 = 0$ on obtenait la famille $(e_2 - e_3, e_2 - e_4, e_2 - e_5)$). Cependant comme on obtient trois vecteurs, la liberté nécessite tout de même un système, on ne gagne donc pas grand chose.

La deuxième, beaucoup plus habituelle, consiste à chercher $\mathrm{Ker}\, C$: avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ a \\ b \end{pmatrix}$, on a :

$$CX = 0 \iff \begin{cases} x+y+z+a+b = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \\ x+y+z+a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z-a-b \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ -z-a-b \\ z \\ a \\ b \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{Ker}\, C = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ puis $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}[e_3 - e_2, e_4 - e_2, e_5 - e_2]$, la famille $[e_3 - e_2, e_4 - e_2, e_5 - e_2]$ est génératrice de $\mathrm{Ker}\, f$ et son cardinal (3) est égal à la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

2. (a) Deux possibilités ici : on peut lire les coordonnées et écrire les $f(e_i)$ en fonction des e_i en lisant les coordonnées sur la matrice, puis chercher $f(u)$ et $f(v)$ par linéarité. Ou bien avec les matrices :

$$CU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad f(u) = 3e_1 + 3e_5$$

et

$$CV = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad f(v) = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5$$

De même pour $f(u-v)$ et $f(u+3v)$ on peut passer par la matrice, mais puisqu'on vient d'exprimer $f(u)$ et $f(v)$ il est cette fois plus rapide d'écrire :
Par linéarité de f :

$$f(u-v) = f(u) - f(v) = e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 = -(e_2+e_3+e_4) + (e_1+e_2) = -u+v = -(u-v)$$

et

$$f(u+3v) = f(u)+3f(v) = 9e_1+3e_2+3e_3+3e_4+9e_5 = 3(e_2+e_3+e_4)+9(e_1+e_2) = 3u+9v = 3(u+3v)$$

(b) $\operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit à $\{0\}$, donc 0 est valeur propre de f et $E_0(f) = \ker(f) = \operatorname{Vect}(e_3 - e_2, e4 - e_2, e_5 - e_2)$ est de dimension 3.

Comme $u - v \neq 0$ et $f(u-v) = -(u-v)$, $u-v$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1, dont le sous-espace propre est de dimension supérieure ou égale à 1.

De même $u + 3v \neq 0$ et $f(u+3v) = 3(u+3v)$, $u+3v$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3, dont le sous-espace propre est de dimension supérieure ou égale à 1.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut dépasser 5, on en déduit qu'il n'y a pas d'autre valeur propre, et que $E_{-1}(f)$ et $E_3(f)$ sont de dimension 1 (si une des dimensions est plus grande, la somme des dimensions dépasse 5).

Les familles $(u-v)$ d'une part et $(u+3v)$ d'autre part sont des familles libres (un vecteur non nul) respectivement de $E_{-1}(f)$ et $E_3(f)$ et dont le cardinal est égal à la dimension du sous-espace propre associé, donc c'en sont des bases. Finalement on a :

$$\operatorname{Sp}(f) = \{0; -1; 3\}\ ,\ E_0(f) = \operatorname{Vect}(e_3 - e_2, e4 - e_2, e_5 - e_2)\ ,\ E_{-1}(f) = \operatorname{Vect}(u-v)\ ,\ E_3(f) = \operatorname{Vect}(u+3v).$$

(c) On en déduit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de f vaut 5, comme la dimension de $\mathbb{R}^5$, donc f est diagonalisable et C aussi.
On obtient une base de vecteurs propres de C en concaténant les bases des sous-espaces propres de C, eux-mêmes obtenus comme coordonnées dans la base canonique des bases des sous-espaces propres de f. En posant

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

R est constituée d'une base de vecteurs propres de C respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, 0, -1 et 3 qui constituent la diagonale de D, donc la formule de changement de base donne :

$$C = RDR^{-1}.$$

3. (a) On calcule sans difficulté :

$$D(D+I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

puis

$$D(D+I)(D-3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(b) On montre alors que C vérifie la même relation :

$$\begin{aligned} C(C+I)(C-3I) &= RDR^{-1}(RDR^{-1}+I)(RDR^{-1}-3I) \\ &= RDR^{-1}(RDR^{-1}+RIR^{-1})(RDR^{-1}-3RIR^{-1}) \\ &= RDR^{-1}R(D+I)R^{-1}R(D-3I)R^{-1} = RD(D+I)(D-3I)R^{-1} \\ &= R0R^{-1} = 0. \end{aligned}$$

On en déduit en développant que :

$$0 = C(C+I)(C-3I) = C(C^2-3C+C-3I) = C(C^2-2C-3I) = C^3-2C^2-3C$$

donc le polynôme $P(X) = X^3-2X^2-3X$ est bien annulateur de C.

4. (a) On indique de se servir des racines de P, qu'il faut donc calculer. Mais comme P est annulateur de C, toutes les valeurs propres de C sont racines de P, donc 0, -1 et 3 sont racines de P. Or c'est un polynôme de degré 3, donc il a au plus 3 racines, et on en déduit que ce sont les seules.

Ensuite il faut s'en servir pour obtenir a_n, b_n et c_n : il faut donc utiliser l'égalité

$$X^n = P(X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$$

qui est la seule information sur ces trois nombres. Puisque $P(\lambda_i) = 0$ pour chacune des racines, on pense à remplacer X par λ_i et on obtient :

$$0^n = P(0)Q(0) + a_n0^2 + b_n0 + c_n \quad \text{donc} \quad 0+0+0+c_n = 0 \quad \text{et} \quad c_n = 0.$$

Ensuite

$$(-1)^n = P(-1)Q(-1) + a_n - b_n \quad \text{donc} \quad 0 + a_n - b_n = (-1)^n \quad \text{et} \quad a_n - b_n = (-1)^n.$$

De même

$$3^n = P(3)Q(3) + 9a_n + 3b_n \quad \text{donc} \quad 0 + 9a_n + 3b_n = 3^n \quad \text{et} \quad 9a_n + 3b_n = 3^n.$$

On résout le système donné par les deux dernières équations avec le pivot $L_2 \leftarrow L_2 - 9L_1$:

$$\left\{\begin{array}{r} a_n - b_n = (-1)^n \\ 12b_n = 3^n - 9(-1)^n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} a_n = b_n + (-1)^n \\ b_n = \frac{3^n-9(-1)^n}{12} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a_n = \frac{3^n+3(-1)^n}{12} \\ b_n = \frac{3^n-9(-1)^n}{12} \end{array}\right.$$

(b) On applique cette fois la relation pour $X = C$:

$$\begin{aligned} C^n &= P(C)Q_n(C) + a_nC^2 + b_nC + c_nI = 0Q_n(C) + \frac{3^n+3(-1)^n}{12}C^2 + \frac{3^n-9(-1)^n}{12}C + 0 \\ &= \frac{3^n+3(-1)^n}{12}C^2 + \frac{3^n-9(-1)^n}{12}C. \end{aligned}$$

5. Totalement en dehors de l'esprit du programme... Les ones(1,5) déjà mis représentent des lignes de 5 coefficients valant 1, donc la première et la dernière ligne de C. Au milieu, il faut donc créer les 3 lignes centrales.

Or la matrice correspondante est constituée d'une colonne de 1 puis d'une matrice à 3 lignes et 4 colonnes de zeros donc on crée C en posant :

```
C=[ones(1,5);ones(3,1),zeros(3,4);ones(1,5)]
```

Exercice 2

1. (a) La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $[n;+\infty[$ donc y admet une primitive, qu'on note G, et qui est de classe C^1. On peut alors calculer :

$$\forall x \in [n;+\infty[,\ f_n(x) = G(x) - G(n)$$

qui est de classe C^1 par opérations élémentaires, et de plus :

$$\forall x \in [n;+\infty[,\ f_n'(x) = G'(x) = e^{\sqrt{x}}$$

Enfin cette dérivée est strictement positive sur $[n;+\infty[$ donc f_n y est strictement croissante.

(b) Soit $x \in [n;+\infty[$. On remarque que pour $t \in [n;x]$, par croissance de la racine carrée et de l'exponentielle,

$$e^{\sqrt{t}} \geqslant e^{\sqrt{n}}$$

On intègre cette inégalité avec des bornes dans l'ordre croissant et on obtient :

$$f_n(x) \geqslant e^{\sqrt{n}} \int_n^x dt = e^{\sqrt{n}}(x-n)$$

Or ce minorant tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc par comparaison

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty.$$

(c) De plus $f_n(n) = \int_n^n e^{\sqrt{t}}\ dt = 0$, et f_n est continue et strictement croissante sur $[n;+\infty[$.

Elle réalise donc une bijection de $[n;+\infty[$ dans $\left[f_n(n); \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[= [0;+\infty[$. Or $1 \in [0;+\infty[$ donc admet un unique antécédent par f_n, donc il existe bien un unique $u_n \in [n;+\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. (a) La question précédente assure que $u_n \geqslant n$, donc par minoration,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

(b) Pour encadrer u_n, il faut d'abord encadrer $f_n(u_n) = \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}\ dt$. Or pour $t \in [n;u_n]$, par croissance de la racine carrée, puis de l'exponentielle, on a

$$e^{\sqrt{n}} \leqslant e^{\sqrt{t}} \leqslant e^{\sqrt{u_n}}$$

puis en intégrant avec des bornes dans l'ordre croissant :

$$e^{\sqrt{n}}(u_n - n) \leqslant f_n(u_n) = 1 \leqslant e^{\sqrt{u_n}}(u_n - n)$$

L'inégalité de gauche donne :

$$u_n - n \leqslant \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} = e^{-\sqrt{n}}$$

puis de même l'inégalité de droite donne $u_n - n \geqslant e^{-\sqrt{u_n}}$ et on obtient bien :

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}.$$

3. (a) Ce programme n'a aucun sens puisqu'on peut résoudre l'inégalité mathématiquement puis calculer informatiquement la solution... Répondons tout de même :

La question 2b assure que si $e^{-\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4}$, alors $u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4}$. On calcule alors par la boucle le premier n vérifiant cette condition en testant une par une les valeurs de n : on incrémente n de 1 à chaque passage et on s'arrête dès que la condition est vérifiée :

```
n=0
while exp(-sqrt(n))>10^(-4) do
   n=n+1
end
disp(n)
```

(b) On cherce par une résolution d'inéquation la 1ère valeur de n vérifiant $e^{-\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4}$: par croissance du logarithme,

$$e^{-\sqrt{n}} \leqslant 10^{-4} \iff -\sqrt{n} \leqslant -4\ln 10 \iff \sqrt{n} \geqslant 4\ln 10 \iff n \geqslant 16(\ln 10)^2$$

et comme n est un entier, n est égal à $16(\ln 10)^2$ s'il est entier (peu probable...), et à $\lfloor 16(\ln 10)^2 \rfloor + 1$ sinon. Calculons une valeur approchée de ce nombre :

$$(\ln 10)^2 \simeq (2,3)^2 = (2+0,3)^2 = 4+2\times 2\times 0,3+0,09 = 5,29 \simeq 5,3 \quad \text{puis} \quad 16(\ln 10)^2 \simeq 16\times 5,3 = 84,8$$

et finalement $n = 85$ est la bonne solution parmi les trois proposées.

4. (a) L'encadrement de la question 2b est un encadrement de v_n, et par opérations élémentaires avec $\lim n = +\infty$ et $\lim u_n = +\infty$, les deux membres extrémaux tendent vers 0, donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

(b) Il faut composer par le carré pour éliminer la racine, mais ce n'est possible que si les deux membres sont de même signe. La racine est positive, et avec $x \geqslant -1$ on obtient $1 + \frac{x}{2} \geqslant \frac{1}{2}$ donc les deux membres sont positifs.

Par stricte croissance du carré sur $\mathbb{R}_+$ on obtient :

$$\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2} \iff 1 + x \leqslant \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4}$$

qui est vérifiée puisque $\frac{x^2}{4} \geqslant 0$, donc l'inégalite de départ est vérifiée également. On en déduit que pour tout $x \geqslant -1$,

$$\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}.$$

(c) Question difficile car on est tenté de se servir de la question 2b... mais il ne faut surtout pas le faire. On part de la relation $v_n = u_n - n$ qui donne $u_n = v_n + n$ puis :

$$\sqrt{u_n} = \sqrt{n + v_n} = \sqrt{n\left(1 + \frac{v_n}{n}\right)} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{v_n}{n}}$$

avec $n \neq 0$, donc on peut bien effectuer la factorisation. La question 4b donne alors :

$$\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{n}\left(1 + \frac{v_n}{2n}\right) = \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}}$$

Enfin on multiplie par -1 ce qui change le sens de l'inégalité puis on compose par l'exponentielle strictement croissante :

$$e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n} - \frac{v_n}{2\sqrt{n}}} = e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$$

(d) On peut alors déduire en minorant le terme de gauche de 2b par le résultat qu'on vient d'obtenir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

On multiplie par $e^{\sqrt{n}}$ et on obtient :

$$\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant e^{\sqrt{n}}(u_n - n) \leqslant 1$$

et avec v_n qui tend vers 0, par opérations élémentaires $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) = e^0 = 1$ et par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1 \quad \text{donc} \quad u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$$

Exercice 3

1. (a) $\mathbb{R}$ l'ensemble de définition de f est symétrique autour de 0 et :

$$\forall x \in]-,1,1[, \quad (-x) \in]-,1,1[\quad \text{et } f(-x) = 0 = f(x)$$
$$\forall x \notin]-1;1[, \quad (-x) \notin]-1;1[\quad \text{et } f(-x) = \frac{1}{2(-x)^2} = \frac{1}{2x^2} = f(x)$$

On en déduit que la fonction f est paire.

(b) f est positive sur $\mathbb{R}$ car un carré est positif et 0 est positif, et continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en -1 et 1 par continuité des fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \frac{1}{2x^2}$ sur les intervalles où elles sont définies.

Etudions l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$, et par parité on se restreint à $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$.
Par relation de Chasles, sous réserve de convergence on a :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \int_0^1 0\ dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\ dx = 0 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\ dx$$

On reconnaît une intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$ donc convergente, donc l'intégrale converge et par parité de f l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ converge.

Déterminons sa valeur. Par parité on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\ dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$$

Pour calculer la valeur de cette dernière, comme on ne reconnaît pas de loi usuelle, on revient à l'intégrale partielle :

$$\int_1^t \frac{1}{x^2}\ dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = -\frac{1}{t} + 1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1$, et f est bien une densité de probabilité.

2. On veut la convergence (ou divergence) mais pas la valeur, on utilise un théorème de comparaison et par imparité, il suffit de s'occuper de l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$:

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 0\ dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\ dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}\ dx$$

Or cette dernière intégrale diverge comme intégrale de Riemann de paramètre 1, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ diverge, et X n'admet pas d'espérance.

3. On pose $Y = \ln(|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

(a) Pour tout x réel on a par croissance de l'exponentielle :

$$F_Y(x) = \mathrm{P}(\ln(|X|) \leqslant x) = \mathrm{P}(|X| \leqslant e^x) = \mathrm{P}(-e^x \leqslant X \leqslant e^x)$$

et comme $-e^x \leqslant e^x$ et X est à densité on obtient :

$$F_Y(x) = \mathrm{P}(X \leqslant e^x) - \mathrm{P}(X < -e^{-x}) = \mathrm{P}(X \leqslant e^x) - \mathrm{P}(X \leqslant -e^{-x}) = F_X(e^x) - F_X(-e^x).$$

(b) Comme X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre finie de points (là où f n'est pas continue, donc en -1 et 1).

Donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf peut-être en x tel que $e^x \neq \pm 1$ et $-e^x \neq \pm 1$ qui sont en nombre fini donc Y est bien une variable à densité.

Une densité est alors donnée par $f_Y(x) = F_Y'(x)$ là où Y est de classe C^1, et on donne une valeur arbitraire ailleurs :

$$f_Y(x) = F'_X(e^x)e^x + F'_X(-e^x)e^x = e^x\left[f(e^x) + f(-e^x)\right] = 2e^x f(e^x)$$

par parité de f.
Déterminons cette fonction :

$$f(e^x) = \begin{cases} 0 & \text{si } e^x \in [-1;1] \\ \frac{1}{2(e^x)^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

et on résout avec l'exponentielle toujours positive et la fonction ln strictement croissante :

$$-1 \leqslant e^x \leqslant 1 \Longleftrightarrow e^x \leqslant 1 \Longleftrightarrow x \leqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad e^x \notin [-1;1] \Longleftrightarrow x > 0$$

donc

$$f(e^x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2e^{2x}} & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

On reconnaît bien la loi exponentielle de paramètre 1.

4. (a) Si $x \geqslant 0$ alors $-x \leqslant 0$ et $e^{-x} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1 - e^{-x}$.
D'autre part, $1 - e^{-x} < 1$ est toujours vrai donc on a bien :

$$x \leqslant 0 \Longrightarrow 1 - e^{-x} \in [0;1[.$$

Si $x < 0$ alors $-x > 0$ et $e^{-x} > 1$ donc $1 - e^{-x} < 0$ et on a bien :

$$x < 0 \Longrightarrow 1 - e^{-x} < 0$$

(b) Soit F_Z la fonction de répartition de Z, on a par croissance de l'exponentielle : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_Z(x) = \mathrm{P}(Z \leqslant x) = \mathrm{P}[-\ln(1-U) \leqslant x] = \mathrm{P}[\ln(1-U) \geqslant -x] = \mathrm{P}\left(1 - U \geqslant e^{-x}\right) = \mathrm{P}\left(U \leqslant 1 - e^{-x}\right) = F_U(1-e$$

qu'on calcule :

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 \text{ si } 1 \leqslant x & \end{cases}$$

donc avec ce qui précède :

$$\begin{cases} \text{Si } x < 0 \quad , \quad 1 - e^{-x} < 0 \quad \text{donc } F_Z(x) = 0 \\ \text{Si } x \geqslant 0 \quad , \quad 0 \leqslant 1 - e^{-x} < 1 \quad \text{donc } F_Z(x) = 1 - e^{-x} \end{cases}$$

et enfin

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

et on reconnaît que :

$$Z \hookrightarrow \varepsilon(1)$$

(c)
```
function y =expo()
      u=rand()
      y= -log(1-u)
endfunction
```

Problème

1. (a)
```
Z=1
while floor(rand()*2)==0 do
       Z=Z+1
end
disp(Z)
```

(b) Il faut rajouter

```
X=floor(rand()*Z)+1
disp(X)
```

2. La série est à termes positifs et comme $\frac{1}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$,

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = o\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

qui est le terme général d'une série convergente donc la série converge par théorème de comparaison des séries à termes positifs.

3. Z suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, donc admet une espérance et une variance et

$$E(Z) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

4. (a) Si $Z = k$, il y a des boules numérotées de 1 à k dans l'urne donc :
   - Si $i > k$,
   $$\mathrm{P}_{(Z=k)}(X = i) = 0$$
   - si $1 \leqslant i \leqslant k$, par équiprobabilité de tirer chaque boule de l'urne,
   $$\mathrm{P}_{(Z=k)}(X = i) = \frac{1}{k}$$

   (b) La famille $(Z = k)_{k\geqslant 1}$ est un système complet d'évènements donc la formule des probabilités totales donne :
   $$\mathrm{P}(X = i) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z = k)P_{(Z=k)}(X = i)$$
   On sépare selon les deux cas vus précédemment pour exprimer les probabilités $\mathrm{P}_{(Z=k)}(X = i)$:
   $$\mathrm{P}(X = i) = \sum_{k=1}^{i-1} P(Z = k)P_{(Z=k)}(X = i) + \sum_{k=i}^{+\infty} P(Z = k)P_{(Z=k)}(X = i)$$
   On peut donc remplacer par les valeurs :
   $$\mathrm{P}(X = i) = \sum_{k=1}^{i-1} 0 + \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \frac{1}{2}^k = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

   (c) On peut donc échanger les sommes :
   $$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{i=1}^{k} 1$$
   $$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times k = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1.$$

5. (a) On a pour tout $k \geqslant i$, $\frac{i}{k} \leqslant 1$ donc
   $$iP(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \sum_{k=i}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

   (b) La série des $iP(X = i)$ est à termes positifs, et son terme général est majoré par le terme général d'une série convergente (géométrique).

   Elle est donc convergente d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, et absolument convergente car $|iP(X = i)| = iP(X = i)$.

   La variable aléatoire Z admet donc une espérance.

(c) On échange donc l'ordre des sommes :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{+\infty} iP(X=i)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\sum_{i=1}^{k} i$$

La deuxième somme est une formule connue :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On change d'indice pour faire apparaître une série géométrique dérivée, puis on rajoute le terme manquant :

$$E(X)=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-1\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-1\right)=\frac{1}{2}\times(4-1)=\frac{3}{2}.$$

6. (a) pour tout $i\geqslant 1$, on déduit de 5)a) que

$$i^2P(X=i)\leqslant i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

La série des $i^2P(X=i)$ est à termes positifs donc l'absolue convergence est équivalente à la convergence.

Or cette série est convergente car elle est à termes positifs et son terme général est majoré par le terme général d'une série géométrique dérivée convergente, donc elle converge absolument.

On en déduit que X admet bien un moment d'ordre 2.

(b) Par théorème de transfert on a :

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{+\infty} i^2P(X=i)=\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty}\frac{i^2}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\sum_{i=1}^{k} i^2$$

Cette deuxième somme est à nouveau connue :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\times(k+1)(2k+1).$$

(c) On développe des deux côtés et on identifie :

$$2k^2+3k+1=ak^2+(b-a)k+c \quad \text{donc} \quad a=2, c=1 \text{ et } b-a=3 \quad \text{donc} \quad b=a+3=2+3=5.$$

Enfin on obtient :

$$(k+1)\ (2k+1)=2k(k-1)+5k+1.$$

(d) On en déduit que

$$E(X^2)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(2k(k-1)+5k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{12}\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+\frac{5}{12}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

et on a fait apparaître trois séries connues :

$$E(X^2)=\frac{1}{12}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{5}{12}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{12}(16+20+2)=\frac{38}{12}.$$

On en déduit alors que par formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{38}{12}-\frac{9}{4}=\frac{38-27}{12}=\frac{11}{12}.$$

7. On se propose de calculer $\mathrm{P}(X=1)$, $\mathrm{P}(X=2)$ et $\mathrm{P}(X \geqslant 3)$.

(a) C'est une somme géométrique :

$$\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = x^0 \times \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

(b) On intègre l'égalité précédente entre 0 et $\frac{1}{2}$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \right) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

d'une part, et d'autre part :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} = \Big[-\ln|1-x| \Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x}\, dx = -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} = \ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}.$$

On obtient bien

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}.$$

(c) Pour

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad \text{on a} \quad 0 \leqslant x^n \leqslant \frac{1}{2^n}$$

et

$$0 < \frac{1}{2} \leqslant 1-x \leqslant 1 \quad \text{donc par décroissance de l'inverse} \quad 1 \leqslant \frac{1}{1-x} \leqslant 2$$

On multiplie ces deux encadrements positifs :

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1-x} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

et on intégre entre 0 et $\frac{1}{2}$ (bornes dans l'ordre croissant), on obtient

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}}\, dx = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

Par théorème d'encadrement, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ on obtient alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx = 0.$$

(d) On obtient alors :

$$\mathrm{P}(X=1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} \right)$$

$$\mathrm{P}(X=1) = \ln 2 - \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} \right) = \ln 2 - 0 = \ln 2.$$

On en déduit ensuite que

$$\mathrm{P}(X=2) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

(e) On obtient finalement :

$$\mathrm{P}(X \geqslant 3) = 1 - \mathrm{P}(X=1) - \mathrm{P}(X=2) = 1 - \ln 2 - \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \approx 1,5 - 1,4 = 0,1.$$