TPs 2 et 3 : Chaines de Markov

Introduction : Les chaînes de Markov donnent un exemple de suites $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires non indépendantes, ce qui est le cas dans beaucoup de situations.
Elles ont des propriétés très intéressantes, notamment la convergence, dans certains cas, vers un "état d'équilibre" (ou "état stable"), et ceci quelles que soient les conditions initiales.

1. Présentation théorique des chaînes de Markov

a) Exemple introductif : épidémiologie

1.

2. D'après l'énoncé, on a :
   - $P_{S_n}(S_{n+1}) = 1/2$ et $P_{S_n}(M_{n+1}) = 1/2$;
   - $P_{I_n}(S_{n+1}) = 1/10$ et $P_{I_n}(I_{n+1}) = 9/10$;
   - $P_{M_n}(M_{n+1}) = 1/5$ et $P_{M_n}(I_{n+1}) = 4/5$;

3. Tout évènement A se décompose sur le SCE $\{S_n, I_n, M_n\}$ en :
$$A = (S_n \cap A)\bigcup(I_n \cap A)\bigcup(M_n \cap A)$$
union d'évènements 2 à 2 incompatibles donc :
$$P(A) = P(S_n \cap A) + P(I_n \cap A) + P(M_n \cap A) = P(S_n)P_{S_n}(A) + P(I_n)P_{I_n}(A) + P(M_n)P_{M_n}(A)$$

4. En prenant l'évènement $A = S_{n+1}$ on obtient :
$$P(S_{n+1}) = P(S_n)P_{S_n}(S_{n+1}) + P(I_n)P_{I_n}(S_{n+1}) + P(M_n)P_{M_n}(S_{n+1})$$
i.e.
$$\boxed{s_{n+1} = 1/2s_n + 1/10i_n + 0m_n}$$
De même, en prenant $A = I_{n+1}$ et respectivement $A = M_{n+1}$ dans la formule des probabilités totales, on obtient :
$$\boxed{i_{n+1} = 0s_n + 9/10i_n + 4/5m_n}$$
et
$$\boxed{m_{n+1} = 1/2s_n + 0i_n + 1/5m_n}$$

5. L'écriture matricielle des 3 égalités précédentes est $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/10 & 0 \\ 0 & 9/10 & 4/5 \\ 1/2 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$.
$U_0 = \begin{pmatrix} s_0 \\ i_0 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'après l'énoncé.
*U_0 est appelé la **loi initiale** et A est appelée la **matrice de transition** de la chaîne de Markov.*

6. Nous connaissons par la question précédente une relation de récurrence entre U_n et U_{n+1}.
Montrons donc par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$:
• Initialisation :
$A^0U_0 = IU_0 = U_0$ donc l'égalité est vraie au rang 0.
• Hérédité :
Supposons que pour un certain entier naturel n, on ait $U_n = A^nU_0$.
Alors, d'après la question précédente, $U_{n+1} = AU_n = A \times A^nU_0$ d'après l'hypothèse de récurrence.
On obtient $U_{n+1} = A^{n+1}U_0$.
On a donc obtenu l'hérédité : si c'est vrai au rang n, c'est forcément vrai au rang $n+1$.

Conclusion : par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$.

b) Caractérisation par la matrice de transition et la loi initiale

i) Définition

ii) Matrice de transition

iii) Loi de l'état à l'instant n

Exercice 1. : simulation de l'exemple épidémiologique
En informatique, on représente l'état S par le nombre 1, l'état I par le nombre 2 et l'état M par le nombre 3.

1.
```
n=input('Entrer la durée de l'expérience :' )
X=zeros(1,n+1)
X(1)=1
for k=1:n do
    if X(k)==1 then
        if rand() <1/2 then
            X(k+1)=1
        else
            X(k+1)=3
        end
    elseif X(k)==2 then
        if rand()<1/10 then
            X(k+1)=1
       else
           X(k+1)=2
        end
    else
        if rand()<1/5 then
            X(k+1)=3
       else
           X(k+1)=2
        end
    end
end
disp(X)
```
2.
```
-->A=[1/2 1/10 0;0 9/10 4/5;1/2 0 1/5];

-->X=grand(10,'markov',A',1)
 X  =

    3.    2.    2.    2.    2.    2.    2.    2.    2.    2.


-->X=grand(10,'markov',A',1)
 X  =

    1.    3.    2.    2.    2.    2.    2.    2.    2.    2.

-->X=grand(10,'markov',A',1)
 X  =

    1.    3.    3.    3.    3.    2.    2.    2.    2.    2.

-->X=grand(10,'markov',A',1)
 X  =

    1.    1.    1.    1.    3.    2.    2.    2.    2.    2.

-->X=grand(10,'markov',A',1)
 X  =

    3.    2.    1.    1.    3.    2.    2.    2.    2.    2.
```
On remarque que l'on passe de l'état S (1) à l'état S (1) ou M (3), de l'état I à l'état I ou S et de l'état M à l'état I ou M ce qui est cohérent avec la diagramme des transitions.

Il est aussi logique qu'on sorte difficilement de l'état I (2) car la probabilité de sortir de l'état immunisé est très faible.

3. **Loi empirique de X_{10} :**

   (a)
   ```
   n=100        //longueur de l'échantillon
   p=zeros(1,n)
   //simulation d'un n-échantillon de $X_10$:
   for k=1:n do
       X=grand(10,'markov',A',1)
       p(k)=X(10)
   end
   disp(p, "p=")
   ```

   (b) l'instruction `M=tabul(p,'i')` renvoit une matrice dont la première colonne `M(:,1)` est la listes des modalités de X_10 et la seconde colonne `M(:,2)` est la liste des effectifs associés aux modalités.

   ```
   M=tabul(p,'i')
   x=M(:,1)
   f=M(:,2)/sum(M(:,2))
   disp(x,"x=")
   disp(f,"f=")
   ```

   Avec $n = 1000$ simulations, on obtient un tableau une loi empirique de X_10 proche de :

k	1	2	3
f_k	$0,13$	$0,77$	$0,1$

4. **Loi théorique de X_{10} :** Le programme suivant construit une matrice de taille 3×11 dont la i-ème colonne contient la loi de X_{i-1} :

```
// On crée une matrice [U0 U1 ...Un]
E= zeros(3,11)
E(:,1)=[1;0;0]                    // range dans la première colonne de E la loi U0.
for i=1:10 do
   E(:,i+1)=A*E(:,i)   // range dans la i+1-ième colonne de E la loi U(i)
end
disp(E,"E=")
```

On obtient

```
E=
       column  1 to 10

    1.    0.5    0.25    0.165    0.1465    0.14645    0.148825    0.1502565    0.1508067    0.1509506
    0.    0.     0.4     0.64     0.732     0.756      0.75844     0.756784     0.7554732    0.754902
    0.    0.5    0.35    0.195    0.1215    0.09755    0.092735    0.0929595    0.0937202    0.0941474

         column 11

    0.1509655
    0.7547297
    0.0943048
```

La loi de X_10 est donc dans la dernière colonne . On a donc :

k	1	2	3
$P(X_{10} = k)$	$0,1509655$	$0,7547297$	$0,0943048$

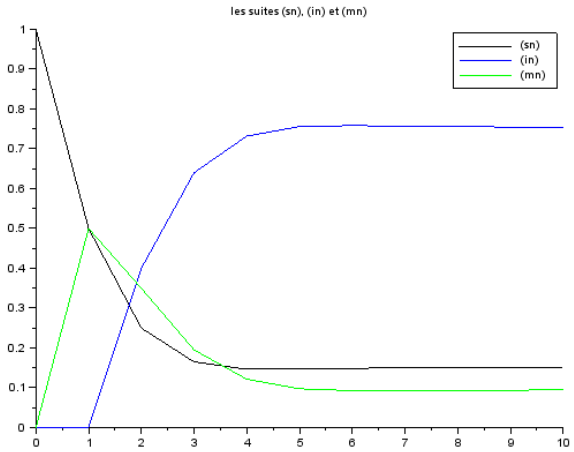
La loi empirique de X_{10} (fréquences obtenues sur un grand échantillon) obtenue à la question 3. est bien proche de la loi (théorique) de X_{10}.

On remarque de plus que la suite des lois des variables (X_n) à l'air de converger vers une loi limite.

5. **Représentation graphique des lois :**

```
n=0:10
plot2d(n', [E(1,:)', E(2,:)',E(3,:)'])
title('les suites (sn), (in) et (mn)')
legend(['(sn)';'(in)';'(mn)'])
```

On obtient :



On remarque alors que la loi de (X_n) converge vers une loi limite π.
En pratique, cela signifie que le pourcentage d'individus sains (respectivement immunisés, malades) se stabilise autour d'une valeur limite au bout d'un grand nombre de jours.

c) Convergence vers l'état stable

i) Etat stable

ii) Convergence vers l'état stable

```
-->[P,D]=spec(A)
 D  =

    0.3 + 0.2i    0             0
    0             0.3 - 0.2i    0
    0             0             1.
 P  =

    0.1889822 + 0.1889822i    0.1889822 - 0.1889822i  - 0.1946593
  - 0.7559289                       - 0.7559289                   - 0.9732965
    0.5669467 - 0.1889822i    0.5669467 + 0.1889822i  - 0.1216621
```

Un vecteur propre associé à la valeur propre 1 est donc $\begin{pmatrix} -0.1946593 \\ -0.9732965 \\ -0.1216621 \end{pmatrix}$. Il reste à le normaliser pour obtenir le vecteur propre stochastique associé à la valeur propre 1. :

```
-->X= P(:,3)
 X  =

  - 0.1946593
  - 0.9732965
  - 0.1216621

-->Pi= X./sum(X)
 Pi  =

    0.1509434
    0.7547170
    0.0943396
```

Les lois des variables (X_n) convergent donc, lorsque n tend vers $+\infty$ vers la loi stationnaire Pi ci-dessus. Au bout d'un très grand nombre de jours, la proportion de personnes saines se stabilise donc autour de $0,1509434$, la proportion de personnes immunisées autour de $0,7547170$ et la proportion de personnes malades autour de $0,0943396$.

2. Le Google Page Rank

a) Le cas particulier

Exercice 2.

1.
2. A l'aide éventuellement d'un arbre on remarque que l'on peut décomposer l'évènement A_{n+1} sur le système complet d'évènements (A_n, B_n, C_n) en :

$$A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \bigcup (A_{n+1} \cap B_n) \bigcup (A_{n+1} \cap C_n)$$

Ce qui donne par incompatibilité 2 à 2 des évènements de l'union, puis par formule des probabilités composées :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$$

i.e :

$$\boxed{a_{n+1} = 1/3a_n + 1/7b_n + 1/12c_n}$$

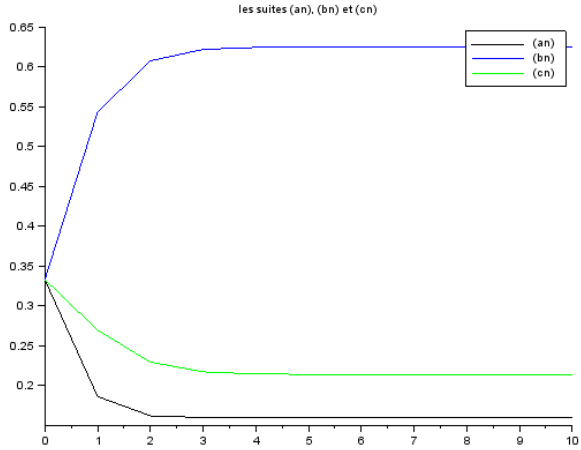
De même, on trouve :

$$\boxed{b_{n+1} = 1/3a_n + 5/7b_n + 7/12c_n}$$

et

$$\boxed{c_{n+1} = 1/3a_n + 1/7b_n + 1/3c_n}$$

3. En posant $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, l'égalité précédente s'écrit $U_{n+1} = SU_n$ où la matrice de transition S vaut $S = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/7 & 1/12 \\ 1/3 & 5/7 & 7/12 \\ 1/3 & 1/7 & 1/3 \end{pmatrix}$.
4.
```
S=[1/3 1/7 1/12;1/3 5/7 7/12; 1/3 1/7 1/3]
function X=deplacements(n)
    x0=grand(1,1,'uin',1,3)
    X=grand(n,'markov',S',x0)
    X= [x0 X]
endfunction
```
On exécute la fonction plusieurs fois : on remarque que le site B est très visité tandis que le site A est peu visité. Celà s'explique car il y a beaucoup de liens pointés vers le site B tandis qu'il pointe vers peu de pages. Au contraire, peu de liens pointent vers le site A.
5.
```
// On crée une matrice [U0 U1 ...Un]
E= zeros(3,11)
E(:,1)=[1/3;1/3;1/3] // range dans la première colonne de E la loi U0.
for i=1:10 do
   E(:,i+1)= A*E(:,i)// range dans la i+1-ième colonne de E la loi Ui
end;
disp(E,"E=")
```
6.
```
n=0:10
plot2d(n', [E(1,:)', E(2,:)',E(3,:)'])
title('les suites (an), (bn) et (cn)')
legend(['(an)';'(bn)';'(cn)'])
```
On obtient :



En zoomant, on voit que la probabilité de se trouver sur le site A converge vers $a \simeq 0,16$,sur le site B converge vers $b \simeq 0,62$ et sur le site C est $c \simeq 0,22$.

7.
```
-->[P,D]=spec(S)
 D  =

    1.    0                        0
    0     0.1904762 + 0.1064794i   0
    0     0                        0.1904762 - 0.1064794i
 P  =

    0.2363516  - 0.1683588 - 0.3011693i  - 0.1683588 + 0.3011693i
    0.9191450    0.7071068                 0.7071068
    0.3151354  - 0.5387480 + 0.3011693i  - 0.5387480 - 0.3011693i

-->X=P(:,1)
 X  =

    0.2363516
    0.9191450
    0.3151354

-->Pi=X/sum(X)
 Pi  =

    0.1607143
    0.625
    0.2142857
```

b) Le cas général

Exercice 3.

1. `A=0.15*1/5*ones(5,5)+0.85*[0 1/2 0 0 0; 1/3 0 1/2 1/2 0;0 0 0 0 0;1/3 1/2 0 0 0;1/3 0 1/2 1/2 1]`
   On note L_i l'évènement : "choisir de passer de la page numéro i à une page ayant un lien avec la page i" et donc $\overline{L_i}$: "choisir de passer de la page i à une page au hasard du web".
   On a alors, par formule des probas totales : $a_{1,1} = P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = P(\overline{L_1})P_{\overline{L_1}}(X_{n+1} = 1) + P(L_1)P_{L_1}(X_{n+1} = 1) = 0.15 \times \frac{1}{5} + 0.85 \times 0$.
   De même, $a_{1,2} = P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = P(\overline{L_2})P_{\overline{L_2}}(X_{n+1} = 1) + P(L_2)P_{L_2}(X_{n+1} = 1) = 0.15 \times \frac{1}{5} + 0.85 \times \frac{1}{2}$.
   ou encore, $a_{2,1} = P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) = P(\overline{L_1})P_{\overline{L_1}}(X_{n+1} = 2) + P(L_1)P_{L_1}(X_{n+1} = 2) = 0.15 \times \frac{1}{5} + 0.85 \times \frac{1}{3}$. etc...

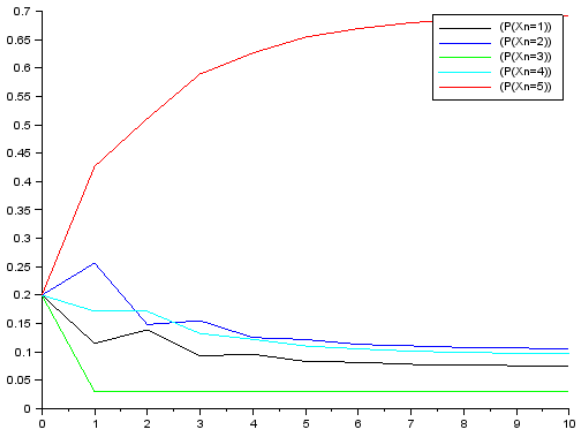
   2. –>[P,D]=spec(A) D =
      1. 0 0 0 0 0 0.6194065 0 0 0 0 0 - 0.1944065 0 0 0 0 0 3.025D-18 0 0 0 0 0 - 0.425 P =

0.1040611 0.2204640 0.8374936 - 1.268D-16 - 0.6708204 0.1460663 0.3213103 - 0.3830923 1.268D-16 0.6708204 0.0419829 - 3.772D-17 9.890D-17 0.7071068 - 4.973D-17 0.1335451 0.3213103 - 0.3830923 - 0.7071068 - 0.2236068 0.9737757 - 0.8630846 - 0.0713091 - 4.043D-16 0.2236068
->Pi=P(:,1)/sum(P(:,1)) Pi =
0.0743596 0.1043755 0.03 0.0954281 0.6958368

3.
```
// On crée une matrice [U0 U1 ...Un]
E= zeros(5,11)
E(:,1)=1/5*ones(5,1)  // range dans la première colonne de E la loi U0.
for i=1:10 do
   E(:,i+1)=A*E(:,i)  // range dans la i+1-ième colonne de E la loi Ui
end;
disp(E,"E=")

 E=


        column 1 to 8

    0.2     0.115        0.1390833    0.0930240    0.0959240    0.0832907    0.0818066    0.0781518
    0.2     0.2566667    0.1482917    0.1551153    0.1253899    0.1218978    0.1132984    0.1107259
    0.2     0.03         0.03         0.03         0.03         0.03         0.03         0.03
    0.2     0.1716667    0.1716667    0.1324309    0.1222808    0.1104692    0.1054056    0.1013304
    0.2     0.4266667    0.5109583    0.5894299    0.6264053    0.6543423    0.6694894    0.6797919

        column  9 to 11

    0.0770585    0.0758823    0.0753662
    0.1079584    0.1067439    0.1057791
    0.03         0.03         0.03
    0.0992015    0.0977156    0.0968661
    0.6857815    0.6896582    0.6919886
```

On remarque que la suites des lois des X_n semble converger vers l'état stable trouvé précédemment.

4.
```
n=0:10
plot2d(n', [E(1,:)', E(2,:)',E(3,:)', E(4,:)',E(5,:)'])

legend(['(P(Xn=1))';'(P(Xn=2))';'(P(Xn=3))';'(P(Xn=4))';'(P(Xn=5))'])
```



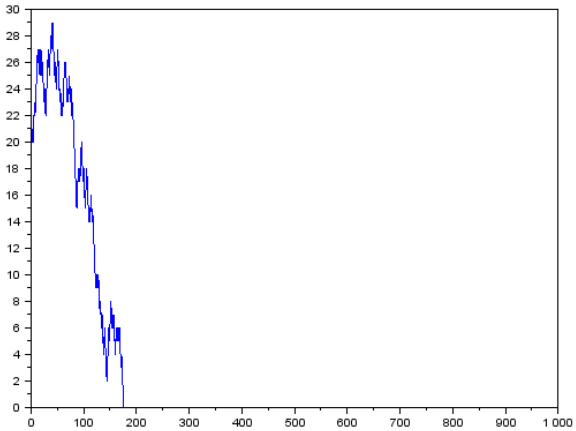
La suite (X_n) converge bien vers une loi limite donc vers l'état stable.

5. La page 5 a le plus gros indice de popularité, suivie des pages 2,4,1 puis 3.
Pour qu'une page soit bien référencée dans Google, il faut donc qu'elle soit la cible de beaucoup de liens externes et qu'elle ait peu de liens vers les autres pages.
Autrement dit c'est une page qui se rend très populaire mais qui ne fait surtout pas de pubs pour les autres pages !

3. Autres chaînes de Markov

Exercice 4.

1. L'ensemble des états est $E = [|0; a+b+1|]$. La matrice de transition est la matrice carrée d'ordre $a+b+1$ définie par :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & q & 0 & 0 & .... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & ... & . & . & . \\ . & . & . & . & .... & . & . & . \\ . & . & . & . & ... & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & p & 1 \end{pmatrix}$$
2.
```
function P=transition(a,b,p)
    P=zeros(a+b+1,a+b+1)
    P(1,1)=1
    P(a+b+1,a+b+1)=1
    for i=2:(a+b) do
        P(i-1,i)=1-p
        P(i+1,i)=p
    end
endfunction
```
3. L'instruction `X=grand(n,'markov',P',a+1)` renvoit la liste des numéros des états aux instants 1 à n de la chaîne de Markov en partant de l'état initial numéro $a+1$ (i.e. $X_0 = a$).
Pour obtenir la valeur des états $(X_1, X_2, ..., X_n)$, il faut donc soustraire 1 aux numéros des états d'où l'instruction `X=X-1`.
Enfin, l'instruction `X=[a X]` permet de rajouter l'état initial à cette liste, c'est-à-dire la liste $(X_0, X_1, ..., X_n)$.
Enfin, on trace le graphique de cette suite (X_n) (en ordonnée) en fonction de l'instant n (en abscisse).
4. On exécute plusieurs fois l'instruction `-->ruinejoueur(2/5,20,30,1000)`. On remarque que le joueur est systématiquement ruiné et le jeu s'arrête, la plupart du temps au bout d'une centaine de parties.



5. On remarque que si $p < 1/2$ (p éloigné de $1/2$), le joueur est systématiquement ruiné, que si $p > 1/2$ (p éloigné de $1/2$),le casino est systématiquement ruiné (même s'il est beaucoup plus riche), et si $p = 1/2$ le joueur peut être ruiné mais le casino aussi.
Dans tous les cas, le jeu s'arrête au bout d'un temps fini : la chaîne de Markov finit toujours dans un état absorbant.
6.
```
function f=ruinejoueurfrequence(p,a,b,n)
    P=transition(a,b,p)
    N=0
    for k=1:1000 do
        X=grand(n,'markov',P',a+1)
        X=X-1
        if X(n)==0 then
            N=N+1
```

```
        end
    end
    f=N/1000
endfunction
```

En tapant par exemple `-->ruinejoueurfrequence(4/5,20,300,1000)`, puis `-->ruinejoueurfrequence(2/5,20,3`
`-->ruinejoueurfrequence(0.51,20,300,1000)` et `-->ruinejoueurfrequence(0.48,20,300,1000)`, on remarque que le joueur est systématiquement ruiné si $p < 1/2$ (lorsque p n'est pas trop proche de $1/2$), le casino est systématiquement ruiné lorsque $p > 1/2$ (lorsque p n'est pas trop proche de $1/2$), en revanche, lorsque p est très proche de $1/2$, chacun a ses chances de ruiner l'autre !

Une probabilité d'un évènement A est la limite de la suite des fréquences de A lorsque l'on fait tendre le nombre de simulations de l'expérience vers $+\infty$. Il faudrait donc faire une infinité de simulations de cette expérience pour obtenir la valeur exacte de la probabilité de la ruine du joueur.

Exercice 5.

1. La première colonne de la matrice B donne les effectifs de fils d'agriculteur dans chacune des catégories socio-professionnelles.
   Pour obtenir la probabilité de joindre chaque catégorie pour un fils d'agriculteur, il faut utiliser la formule d'équiprobabilité $p = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$ où l'effectif total est le nombre total de fils d'agriculteurs, i.e. `sum(B(:,1))`.
   D'où la formule `A(:,1)= B(:,1)/sum(B(:,1))`.
   Idem pour les autres colonnes.
2.
```
function Y=socio(x0,n,r)
    Y=zeros(1,r)
    for k=1:r do
        X=grand(n,'markov',A',x0)
        Y(k)=X(n)
    end
endfunction
```
   On veut $x0 = 6$ (catégorie initiale numéro 6 : les ouvriers), $n = 3$ (on veut la loi de X_3 : 3 générations après l'ouvrier) et $r = 100$. On tape donc l'instruction `-->Y=socio(6,3,100)`, qui donne par exemple :
```
Y =


      column  1 to 17

   3.    6.    4.    4.    5.    4.    4.    6.    1.    3.    4.    5.    6.    6.    4.    4.    3.

      column 18 to 34

   3.    2.    6.    3.    3.    4.    4.    4.    3.    3.    4.    4.    4.    4.    3.    5.    4.

      column 35 to 51

   6.    6.    3.    5.    3.    6.    5.    6.    4.    3.    2.    3.    3.    5.    4.    4.    3.

      column 52 to 68

   4.    4.    3.    6.    4.    2.    6.    3.    6.    3.    6.    6.    3.    5.    6.    6.    3.

      column 69 to 85

   4.    2.    3.    6.    3.    2.    6.    4.    4.    5.    4.    5.    2.    4.    4.    5.    3.

      column  86 to 100

   3.    3.    4.    3.    4.    6.    4.    4.    4.    2.    6.    6.    3.    5.    3.
```
   Ici il y a 21 arrières petits fils d'ouvriers qui sont dans la catégorie numéro 3 (cadres) donc 21% d'arrière petits-fils d'ouvrier sont cadres.
3. `function []=socio(x0,n,r)`

```
    Y=zeros(1,r)
    for k=1:r do
        X=grand(n,'markov',A',x0)
        Y(k)=X(n)
    end
    M=tabul(Y,'i')
    x=M(:,1)
    f= M(:,2)/sum(M(:,2))
    clf,bar(x,f)
endfunction
```

4. La figure numéro i présente le diagramme des fréquences des catégories professionnelles des 100 ième descendants d'une personne de la catégorie numéro i.
On obtient "quasiment" les même diagrammes en bâton. On remarque donc qu'a au bout de 100 génération, les probabilités d'appartenir à chacune des catégories ne dépend plus de la catégorie socio-professionnelle de l'ancêtre.
Par exemple, avec ce modèle markovien de mobilité sociale, environ 30% de la population va avoir un emploi de cadre (au bout de quelques générations, le temps que se mettre en place le "régime stationnaire").

Ceci est cohérent avec la théorie des chaînes de Markov car le cours affirme qu'il n'y a qu'un seul état stable (loi stationnaire) vers lequel la loi de X_n converge, et ce quelle que soit sa valeur initiale $x0$.

```
-->[P,D]=spec(A)
 D  =

    1.    0           0           0           0           0
    0     0.4397275   0           0           0           0
    0     0           0.2154205   0           0           0
    0     0           0           0.0451207   0           0
    0     0           0           0           0.1085391   0
    0     0           0           0           0           0.1685921
 P  =

  - 0.0162062  - 0.0055536    0.5905812  - 0.0099201  - 0.0109914    0.1023596
  - 0.2075791  - 0.0187650    0.1331878    0.0471284  - 0.1101050  - 0.8763303
  - 0.6102495  - 0.7067868    0.3953666  - 0.1758011    0.5511181    0.3493219
  - 0.5010503  - 0.0481554  - 0.3371346    0.6339726  - 0.6758025    0.0809614
  - 0.2045371    0.0780804  - 0.2210925  - 0.7178774  - 0.1910456    0.0416004
  - 0.5397749    0.7011804  - 0.5609086    0.2224977    0.4368265    0.3020870

-->Pi=P(:,1)/sum(P(:,1))
 Pi  =

    0.0077937
    0.0998266
    0.2934742
    0.2409594
    0.0983637
    0.2595824
```

On retrouve bien la loi de répartition donnée par les diagrammes.
Critique : Dans la réalité, la matrice de transition A n'est probablement pas indépendante du temps : en l'espace d'une ou deux générations, elle change sensiblement. Ce modèle markovien ne décrit probablement pas bien la réalité sociale. Une validation statistique des prédictions de ce modèle s'imposent.