TP 5 : Introduction aux fonctions de deux variables

1. Présentation des fonctions de 2 variables

Les variations des grandeurs économétriques dépendent souvent de plusieurs facteurs. On est alors amenés à étudier des fonctions de plusieurs variables.
Nous nous intéressons cette année aux fonctions numériques de deux variables c'est-à-dire aux fonctions définies sur un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

Exemples

1. La fonction f définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ est bien définie en fonction d'un couple de 2 variables réels (x,y), et $f(x,y)$ est un unique réel.
2. De même, la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par $f(x,y) = \ln(y) + \exp(-x)(x-2y)$ est une fonction de 2 variables, à valeurs réelles.
3. L'exemple le plus concret de fonction de 2 variables est l'altitude $f(x,y)$, fonction de la longitude x et de la latitude y.

a) Représentations graphiques

Peut-on représenter graphiquement ces fonctions comme les fonctions à une variable réelle ?
Comment représenteriez-vous graphiquement de telles fonctions ?

Nous allons voir qu'il y a 2 représentations graphiques possibles de telles fonctions : une représentation en 3 dimensions (dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension 3) et une représentation en 2 dimensions (dans l'espace $\mathbb{R}^2$ de dimension 2)

i) Représentation graphique en 3 dimensions

On représente une fonction de 2 variables en plaçant tous les points de coordonnées $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé.

• La fonction `plot3d`
On veut représenter graphiquement la fonction $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $[-3;3] \times [-5;5]$.
Scilab ne pouvant pas calculer l'image d'une infinité de points, on effectue un maillage de l'ensemble $[-3;3] \times [-5;5]$:

-On choisit une subdivision de $[-3;3]$:

```
-->x=linspace(-3,3,100)
```

-De même, on choisit une subdivision de $[-5;5]$:

```
-->y=linspace(-5,5,100)
```

-Pour chaque point $(x(i), y(j))$ du maillage de $[-3;3] \times [-5;5]$, on calcule $z_{i,j} = f(x(i), y(j))$:

```
--> z= zeros(100,100);
-->for i=1:100 do for j=1:100 do z(i,j)= x(i)^2-2*x(i)*y(j)+2*y(j)^2+exp(-x(i)); end; end;
```

On peut alors représenter graphiquement tous les points de coordonnées $\begin{pmatrix} x(i) \\ y(j) \\ f(x(i), y(j)) \end{pmatrix}$ par l'instruction

```
--> plot3d(x,y,z)
```

• La fonction `fplot3d`
On rappelle que pour définir une fonction f, on peut utiliser l'environnement `function` :

```
function z=f(x,y)
    z=x^2-2*x*y+2*y^2+exp(-x)
endfunction
```

Mais cet environnement est surtout utile pour définir des fonctions complexes (lorsqu'il y a un programme à écrire dans la fonction pour arriver au calcul de z). Les fonctions simples peuvent être définies avec l'instruction `deff` :

```
deff('z=f(x,y)', 'z=x^2-2*x*y+2*y^2+exp(-x)')
```

On utilisera `deff` dans ce TP.

La fonction `fplot3d` est plus simple à utiliser que `plot3d` car il suffit de lui donner la fonction f et elle calcule les images du maillage toute seule :
L'instruction suivante trace la fonction f sur $[-6;6] \times [-6;6]$:

```
-->deff('z=f(x,y)', 'z=x^2-2*x*y+2*y^2+exp(-x)')
-->x=-6:0.1:6;
-->y=-6:0.1:6;
-->fplot3d(x,y,f)
```

Faites tourner la figure pour la voir sur tous les angles, à l'aide de l'icône "pivoter" qui se trouve sur le bandeau de la figure.
Emettre des hypothèses sur un (ou des) éventuel extremum (maximum ou minimum) local de f sur $\mathbb{R}^2$.

ii) Représentation graphique en 2 dimensions

Lorsqu'on utilise des cartes pour se représenter une montagne, on utilise la représentation en 2 dimensions par lignes de niveau que nous allons étudier dans cette partie.
Si vous avez déjà fait de la randonnée, vous connaissez cette représentation à travers les cartes IGN !

Construire la ligne de niveau k consiste à construire dans le plan la courbe formée par l'ensemble des points (x, y) vérifiant l'équation $f(x, y) = k$.
Soit v la liste des niveaux qui nous intéressent, L'instruction `contour(x,y,f,v)` construit les lignes de niveau de f correspondant aux niveaux contenus dans le vecteur v.

```
-->scf(1)
-->contour(x,y,f,1:10:200)
```

Vérifier que les résultats sont cohérents avec la figure en 3 dimensions obtenue précédemment.
Donnez une première valeur approchée du minimum local m de la fonction f et du point (x_0, y_0) en lequel le minimum local est atteint.

Exercice 1. Construire des lignes de niveaux autour de la valeur approchée du minimum local de f, et les resserrer jusqu'à obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près du minimum local m de f et du point (x_0, y_0) en lequel ce minimum m est atteint.

b) Etude mathématique des extrema locaux

Définition 1 : dérivées partielles d'ordre 1

• *On appelle* ***dérivée partielle par rapport à la première coordonnée*** *la fonction, notée $\partial_1(f)$ obtenue en dérivant f par rapport à la variable x, la variable y étant considérée comme une constante.*
• *On appelle* ***dérivée partielle par rapport à la seconde coordonnée*** *la fonction, notée $\partial_2(f)$ obtenue en dérivant f par rapport à la variable y, la variable x étant considérée comme une constante.*

Exemple
Soit f la fonction définie dans la partie précédente ($f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$) , calculer $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$:

Définition 2 : gradient de f

On appelle ***gradient de*** *f au point $(x_0;y_0)$, noté $(\nabla f)(x_0;y_0)$, la matrice colonne* $\boxed{(\nabla f)(x_0;y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0;y_0) \\ \partial_2 f(x_0;y_0) \end{pmatrix}}$.

Interprétation graphique :*Si on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé, le vecteur $\vec{grad}\ f(x_0,y_0)$, de coordonnées $(\nabla f)(x_0;y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0;y0) \\ \partial_2 f(x_0;y_0) \end{pmatrix}$, placé au point $(x_0;y_0)$ est orthogonal aux lignes de niveau.En effet, il est l'équivalent de la dérivée d'une fonction d'une variable, c'est à dire qu'il indique l'intensité et la direction dans laquelle la fonction "monte".*

Définition 3 : points critiques

On appelle ***point critique de*** *f tout point (x_0,y_0) vérifiant l'équation $(\nabla f)(x_0;y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$*

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x_0,y_0) &= 0 \\ \partial_1(f)(x_0,y_0) &= 0 \end{cases}$$

Exemple
Montrer que les points critiques de f sont les solutions du système d'équations : $\begin{cases} x - e^{-x} = 0 \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$

Théorème 1

Si f admet un extremum local en (x_0,y_0) alors (x_0,y_0) est un point critique de f.
Attention : la réciproque est fausse ! Un point critique peut ne pas être un extremum local.

Remarque
Remarquer sur des graphiques que les fonction d'une variables vérifiaient déjà le même théorème ! !
Exemple
Montrer que l'équation $x - e^{-x} = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. En déduire le nombre de points critiques de f. Combien d'extremas locaux peut avoir f sur $\mathbb{R}^2$? Est-ce cohérent avec nos précédentes observations ?

Définition 4 : dérivées partielles d'ordre 2

On appelle dérivées partiels secondes de f les dérivées partielles de $\partial_1 f$ et de $\partial_2 f$.
On les note :

$$\boxed{\partial^2_{1,1} f = \partial_1 (\partial_1 f)}$$

$$\boxed{\partial^2_{2,1} f = \partial_2 (\partial_1 f)}$$

$$\boxed{\partial^2_{1,2} f = \partial_1 (\partial_2 f)}$$

$$\boxed{\partial^2_{2,2} f = \partial_2 (\partial_2 f)}$$

Exemple
Soit f la fonction définie dans la partie précédente, calculer ses dérivées partielles secondes.

Théorème 2 : théorème de Schwarz

On remarque que $\partial^2_{1,2} f = \partial^2_{2,1} f$. Cette propriété est générale sur les fonctions de classe C^2. Elle est appelée le théorème de Schwarz.

Théorème 3

Soit (x_0, y_0) un point critique de f. On appelle matrice hessienne de f en $(x_0; y_0)$ la matrice définie par :

$$\boxed{\nabla^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} (\partial^2_{1,1} f)(x_0, y_0) & (\partial^2_{1,2} f)(x_0, y_0) \\ (\partial^2_{2,1} f)(x_0, y_0) & (\partial^2_{2,2} f)(x_0, y_0) \end{pmatrix}}$$

Si les valeurs propres de cette matrice sont de même signe, alors le point critique est un extremum local (minimum si elles sont positives, maximum si elles sont négatives).
Sinon, le point critique n'est pas un extremum local.

Exemple
Déterminer la matrice hessienne de f en son unique point critique :

Il faudrait calculer les valeurs propres de cette matrice pour vérifier si le point critique est un extremum local de f.

2. Exercices

Avant de commencer chaque exercice, effacer les anciennes fenêtres à l'aide des instructions suivantes :

```
--> clf(0), clf(1), scf(0)
```

Exercice 2. (point selle)
On pose $D = \mathbb{R}^2$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \text{ pour tout couple } (x, y) \text{ de } D.$$

1. Tracer le graphe de la fonction f à l'aide de la fonction **fplot3d**, pour x et y pris entre -3 et 3, avec un pas de 0,05.
   Sur une autre figure, tracer des lignes de niveau de la fonction f à l'aide de la fonction **contour**.
   On se servira des valeurs de $f(x, y)$ observées sur le graphe pour donner des niveaux cohérents.

   Voyez-vous sur la courbe un point critique ? Est-ce un extremum local ?

2. Calculer ses dérivées partielles premières et secondes.

3. Déterminer les points critiques de f et donner la matrice hessienne en ces points critiques.
   Prouver que f n'a pas d'extremum local.

Cet exemple nous confirme qu'un point critique n'est pas toujours un extremum local. On a ici un "point selle".

Exercice 3. (ESC 2002)
On pose $D =]0, 1[\times]0, 1[$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :

$$f(x, y) = xy(2 - x - y) \text{ pour tout couple } (x, y) \text{ de } D.$$

1. Tracer le graphe de la fonction f à l'aide de la fonction **fplot3d**, pour x et y pris entre 0 et 1, avec un pas de 0,05.
   Conjecturer l'existence d'extrema locaux et/ou globaux de f.

2. Sur une autre figure, tracer des lignes de niveau de la fonction f à l'aide de la fonction **contour**, autour du point critique conjecturé. Les résultats sont-ils en accords avec nos observations ?
   Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'extremum local m et une valeur approchée à 10^{-1} près des coordonnées du point $(x_0; y_0)$ en lequel l'extremum local m est atteint.

3. Calculer ses dérivées partielles premières et secondes.

4. Déterminer les points critiques de f sur $D =]0, 1[\times]0, 1[$ et donner la matrice hessienne en ces points critiques.

5. Déterminer les valeurs propres de cette hessienne à l'aide de la fonction `spec` de Scilab et conclure quand à l'existence d'un extremum local de f sur D.

Exercice 4.
On pose $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :

$$f(x, y) = x(\ln(x)^2 + y^2) \text{ pour tout couple } (x, y) \text{ de } D.$$

1. Tracer le graphe de la fonction f à l'aide de la fonction **fplot3d**, pour x pris entre $0,1$ et 2 et y pris entre -1 et 1, avec un pas de $0,01$.
   Conjecturer l'existence d'extrema locaux et/ou globaux de f.

2. Calculer ses dérivées partielles premières et secondes.

3. Déterminer les points critiques de f et donner la matrice hessienne en ces points critiques.
   Prouver par le calcul que f a un extremum local et donner la nature de cet extremum.

Exercice 5. (EDHEC 2005)
On pose $D = \mathbb{R}^2$ et f la fonction de deux variables définie sur D par :

$$f(x, y) = xe^{x(y^2+1)} \text{ pour tout couple } (x, y) \text{ de } D.$$

1. Tracer le graphe de la fonction f à l'aide de la fonction **fplot3d**, pour x pris entre -2 et 0 et y pris entre -1 et 1, avec un pas de $0,05$.
   Conjecturer l'existence d'extrema locaux et/ou globaux de f.

2. Calculer ses dérivées partielles premières et secondes.

3. Déterminer les points critiques de f et donner la matrice hessienne en ces points critiques.
   Prouver par le calcul que f a un extremum local et donner la nature de cet extremum.