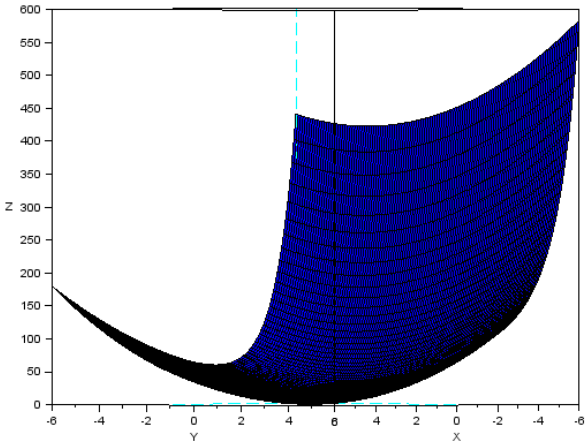
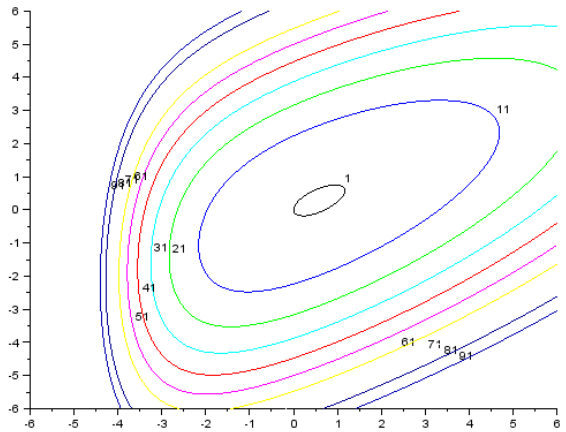
TP 5 :Correction

Exercice 1.
```
-->deff('z=f(x,y)', 'z=x^2-2*x*y+2*y^2+exp(-x)')
-->x=-6:0.1:6;
-->y=-6:0.1:6;
-->fplot3d(x,y,f)
```



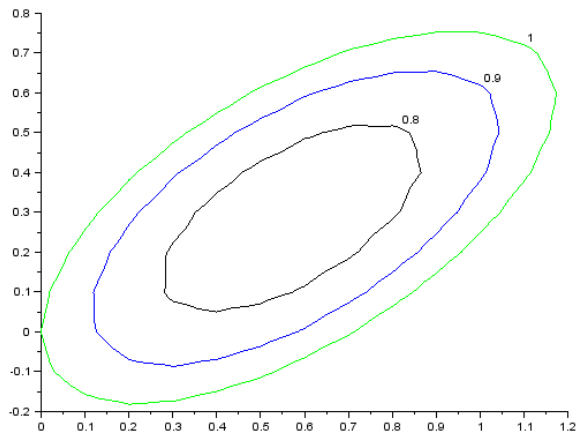
On remarque en pivotant la courbe de la fonction que f semble admettre un minimum local m autour du point de coordonnées $(0,0)$.
De plus, f reste positive sur $[-6;6]^2$ doc $m > 0$.

```
-->scf(1)
-->contour(x,y,f,1:10:200)
```



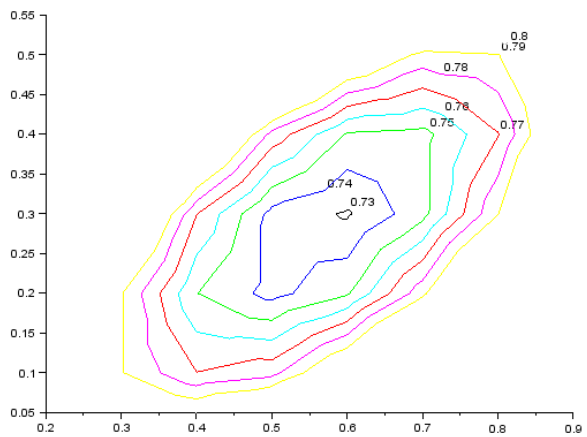
On remarque que la ligne de niveau 1 est atteinte donc $0 < m \leq 1$.
Testons donc les lignes de niveau entre 0 et 1 pour trouver une valeur approchée à 10^{-1} près du minimum local de f :

```
-->clf, contour(x,y,f,0:0.1:1)
```



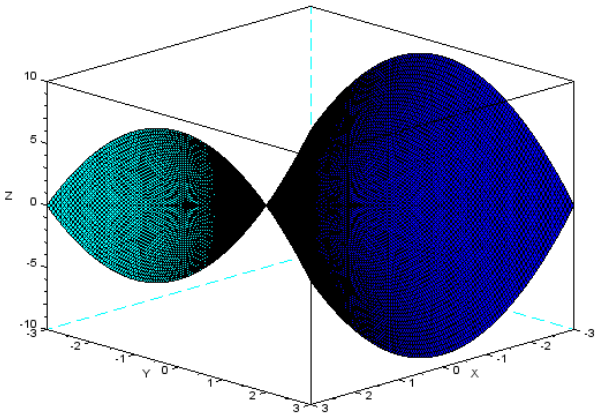
On remarque que les lignes de niveaux inférieures ou égales à $0,7$ ne sont pas atteintes, alors que la ligne de niveau $0,8$ l'est. Le minimum local m est donc dans l'intervalle $[0,7;0,8]$.
Construisons alors des lignes de niveau espacées de 10^{-2} dans l'intervalle $[0,7;0,8]$ pour obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près du minimum local de f :

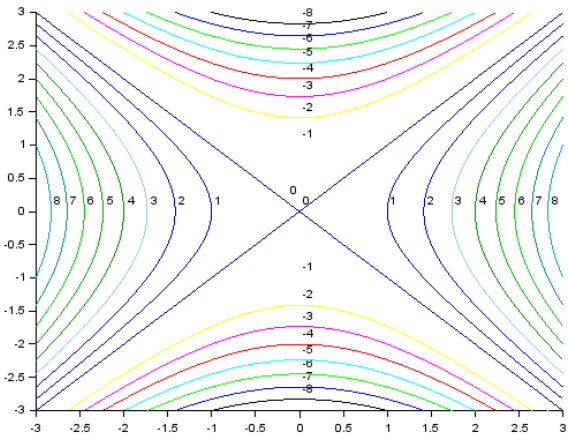
```
-->clf, contour(x,y,f,0.7:0.01:0.8)
```



Pour les mêmes raisons que précédemment, on obtient que le minimum local de f est dans l'intrevalle $[0,72;0,73]$.
$m \simeq 0,73$ est donc une valeur approchée (par excès) de m à 10^{-2} près.
En zoomant sur la ligne de niveau $0,73$, on obtient que $(0,6;0,3)$ sont des valeurs approchées à 10^{-2} près du point $(x_0;y_0)$ en lequel le minimum local est atteint.

Exercice 2. 1.
```
deff('z=f(x,y)', 'z=x^2-y^2')
x=[-3:0.05:3]
y=[-3:0.05:3]
fplot3d(x,y,f)
scf(1)
contour(x,y,f,-8:8)
```





On remarque que la courbe de f n'a pas d'extremum local sur $[-3;3]^2$. En revanche, il semble qu'au point de coordonnées $(0;0)$, la courbe admette un point critique. En effet, si on ne fait varier que x ($y=0$ restant constante), la courbe a un maximum local en 0 selon cette direction donc $\partial_1 f(0,0)=0$ et de même, si on ne fait varier que y ($x=0$ restant constante), la courbe a un maximum local en 0 selon cette direction donc $\partial_2 f(0,0)=0$. Le point de coordonnées $(0;0)$ est alors appelé un point selle.

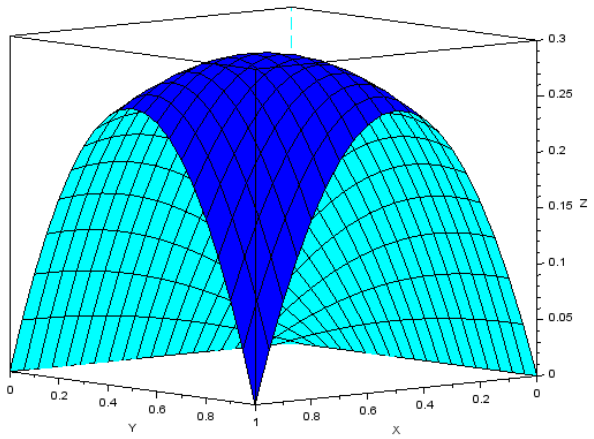
2. • **Dérivées partielles premières :**
$\partial_1 f(x,y)=2x$ et $\partial_2 f(x,y)=-2y$
• **Dérivées partielles secondes :**
$\partial^2_{1,1} f(x,y)=2$, $\partial^2_{1,2} f(x,y)=0$, $\partial^2_{2,1} f(x,y)=0$, $\partial^2_{2,2} f(x,y)=-2$.

3. Les points critiques sont les solutions du système d'équations $\nabla f(x,y)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \partial_1 f(x,y) & = & 0 \\ \partial_2 f(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$
$\left\{\begin{array}{lcl} 2x & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=0.$
L'unique point critique de f est le point de coordonnées $(0;0)$ ce qui coïncide avec nos observations graphiques.
C'est donc l'unique extremum local POSSIBLE.
<u>Etudions la matrice hessienne en ce point :</u>
$\nabla^2 f(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux donc les valeurs propres de la matrice hessienne de f sont -2 et 2 : elles sont de signe opposé donc on a prouvé que f n'a pas d'extremum local en $(0;0;)$ donc n'a finalement aucun extremum local.

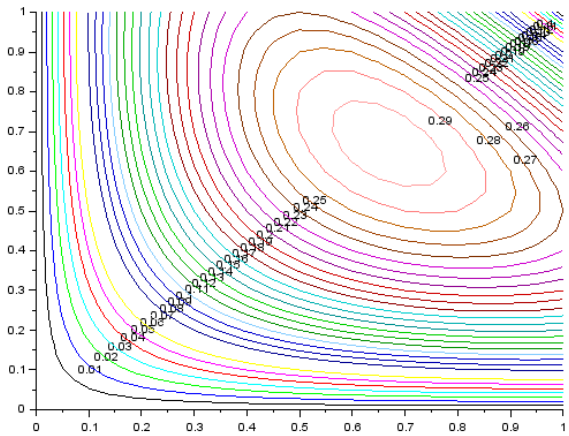
Exercice 3. 1. `deff('z=f(x,y)', 'z=x*y*(2-x-y)')`

```
x=[0:0.05:1]
y=[0:0.05:1]
fplot3d(x,y,f)
```



On remarque que f semble avoir un maximum local sur le domaine $]0;1[^2$.
On remarque également que les valeurs prises par f sont compris entre 0 et $0,3$.

2. `scf(1)`
`contour(x,y,f,0:0.01:0.3)`



L'extremum local est compris dans l'intervalle $[0,29;0,3]$ donc $m \simeq 0,3$ est une valeur approchée de m à 10^{-2} près.
Une valeur approchée du point $(x_0;y_0)$ en lequel l'extremum est atteint est $(0,6;0,7)$.

3. ! ne pas développer avant de dériver car c'est la forme factorisée des dérivées partielles qui va nous permettre de trouver facilement les points critiques.
• **Dérivées partielles premières :**
$\partial_1 f(x,y) = y(2-x-y) + xy(-1) = y(2-2x-y)$ et $\partial_2 f(x,y) = x(2-2y-x)$.
• **Dérivées partielles secondes :**
$\partial^2_{1,1} f(x,y) = -2y$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = 2-2x-2y$, $\partial^2_{2,1} f(x,y) = 2-2x-2y$, $\partial^2_{2,2} f(x,y) = -2x$.

4. Les points critiques de f sont les solutions du système d'équations : $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y(2-2x-y) & = & 0 \\ x(2-2y-x) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$
$\left\{ \begin{array}{rcl} 2-2x-y & = & 0 \\ 2-2y-x & = & 0 \end{array} \right.$ car sur le domaine D, on a $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

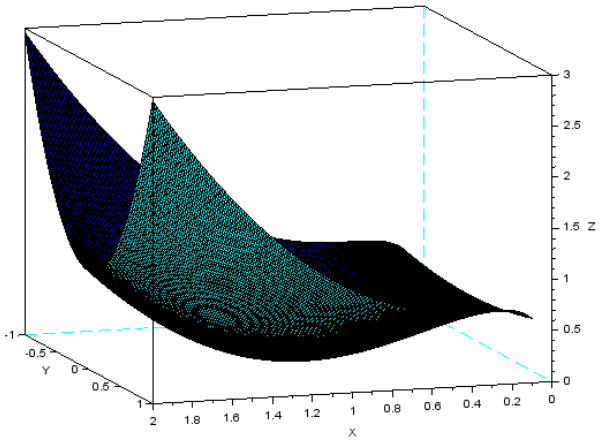
Ainsi, $\left\{\begin{array}{rcl} \partial_1 f(x,y) & = & 0 \\ \partial_2 f(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x+y & = & 2 & (L_1) \\ x+2y & = & 2 & (L_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 2x+y & = & 2 & (L_1) \\ y & = & \frac{2}{3} & (L_2 < -2L_2 - L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $x = y = \frac{2}{3}$.

<u>Déterminons la matrice hessienne en ce point</u> :
$\nabla^2 f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$.

5.
```
-->A=[-4/3 -2/3; -2/3 -4/3]
 A  =

  - 1.3333333  - 0.6666667
  - 0.6666667  - 1.3333333
-->[P,D]= spec(A)
 D  =

  - 2.     0.
    0.   - 0.6666667
 P  =

    0.7071068  - 0.7071068
    0.7071068    0.7071068
```

Les valeurs propres de A sont de même signe donc f a bien un extremum local au point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et comme les valeurs propres sont négatives, il s'agit d'un maximum local.
Ce maximum local vaut $m = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} \simeq 0,2963$. Tout coïncide bien avec les observations graphiques.

Exercice 4. 1.
```
deff('z=f(x,y)', 'z=x*(log(x)^2+y^2)')
x=[0.1:0.01:2]
y=[-1:0.01:1]
fplot3d(x,y,f)
```



La courbe de f semble avoir un minimum local au point de coordonnées $(1;0)$ valant à peu près 0.

2. **Dérivées partielles premières :**
$\partial_1 f(x,y) = \ln(x)^2 + y^2 + 2\ln(x)$ et $\partial_2 f(x,y) = 2xy$.
• **Dérivées partielles secondes :**
$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \frac{2}{x}\ln(x) + \frac{2}{x}$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = 2y$, $\partial^2_{2,2} f(x,y) = 2x$.

3. Les points critiques de f sont les solutions du système d'équations :

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \ln(x)^2 + y^2 + 2\ln(x) & = & 0 \\ 2xy & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \ln(x)^2 + 2\ln(x) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x)(\ln(x)+2) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) & = & 0 \Leftrightarrow x=1 \\ y & = & 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ln(x) & = & -2 \Leftrightarrow x=e^{-2} \\ y & = & 0 \end{cases}$$

Les uniques POSSIBLES extrema locaux sont en $(1,0)$ ou en $(1,e^{-2})$.

Déterminons la matrice hessienne en ces points :

$\nabla^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de $\nabla^2 f(1,0)$ sont de même signe et positives donc f admet un minimum local en $(1,0)$ valant $f(1,0)=0$.

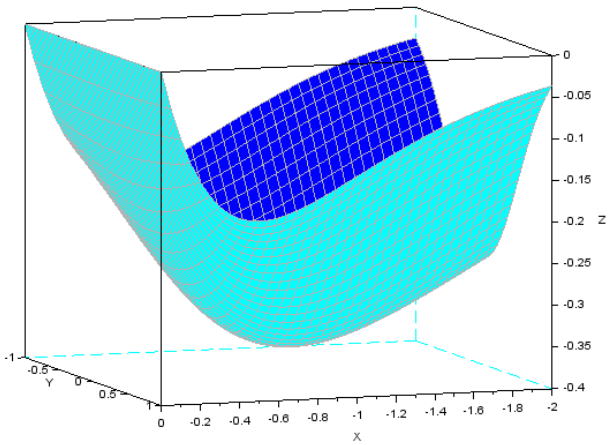
$\nabla^2 f\left(1,e^{-2}\right) = \begin{pmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de $\nabla^2 f\left(1,e^{-2}\right)$ sont de signe opposés donc f n'a pas d'extremum local en $\left(1,e^{-2}\right)$.

Les calculs coïncident donc avec les observations graphiques.

Exercice 5. 1. `deff('z=f(x,y)', 'z=x*exp(x*(y^2+1))')`

```
x=[-2:0.05:0]
y=[-1:0.05:1]
fplot3d(x,y,f)
```



La courbe de f semble avoir un minimum local au point de coordonnées $(-1;0)$ valant à peu près $-0,35$.

2. **Dérivées partielles premières :**
$\partial_1 f(x,y) = e^{x(y^2+1)} + x(y^2+1)e^{x(y^2+1)} = (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)}$ et $\partial_2 f(x,y) = 2x^2 y e^{x(y^2+1)}$.
• **Dérivées partielles secondes :**
$\partial^2_{1,1} f(x,y) = (y^2+1)e^{x(y^2+1)} + (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)}$, $\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = 4xye^{x(y^2+1)} + 2x^2y(y^2+1)e^{x(y^2+1)}$, $\partial^2_{2,2} f(x,y) = 2x^2 e^{x(y^2+1)} + 4x^3y^2 e^{x(y^2+1)}$.

3. Les points critiques de f sont les solutions du système d'équations : $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)} & = & 0 \\ 2x^2 y e^{x(y^2+1)} & = & 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 1+x(y^2+1) & = & 0 \\ 2x^2 y & = & 0 \end{cases}$ car $exp > 0$, $\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & -1 \\ y & = & 0 \end{cases}$.

L'unique POSSIBLE extremum local est le point de coordonnées $(-1,0)$.

Déterminons la matrice hessienne en ce point :

$\nabla^2 f(-1,0) = \begin{pmatrix} 1/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de $\nabla^2 f(-1,0)$ sont de même signe et positives donc f admet un minimum local en $(-1,0)$ valant $f(-1,0) = -1/e \simeq -0,368$. Les calculs coïncident donc avec les observations graphiques.