TP 7 : Correction

I. Convergence en loi : le cas de variables discrètes

Exercice 1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Nous allons vérifier que la suite (X_n) converge en loi vers une une variable $X \hookrightarrow P(\lambda)$ (de même espérance).

1. $pk = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}\times\lambda}{(k-1)!\times k} = p_{k-1}\times\frac{\lambda}{k}$.

```
function P=loi_Poisson(lambda)
    P(1)=exp(-lambda)
    for k=1:20 do
        P(k+1)= P(k)*lambda/k
    end
endfunction
```

2. (a)
```
lambda=1
n=input('Entrer n: ')
X=grand(1,1000,'bin',n,lambda/n)

M=tabul(X,"i")
x=M(:,1)
f=M(:,2)/1000
bar(x,f)
bar(0:20,loi_Poisson(lambda),width=0.2, color='red')
```

   (b) La matrice ligne `x` contient la première colonne de la tabulation de `X`, c'est-à-dire la liste des différentes modalités de X rangées dans l'ordre croissant autrement dit le liste des différentes valeurs prises par les 1000 simulations d'une variable suivant une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{\lambda}{n})$) .
   La seconde colonne de `M` contient les effectifs respectifs de chaque modalité. Ainsi, la matrice ligne `f` contient les fréquences respectives de chaque modalité.

   Ainsi, l'instruction `bar(x,f)` construit le diagramme en bâtons des fréquences des valeurs prises par 1000 simulations d'une variable binomiale de paramètres $(n, \frac{\lambda}{n})$.

   L'instruction `bar(0:20,loi_Poisson(lambda),width=0.2, color='red')` construit quant à elle le diagramme en bâton de la loi de poisson de paramètre λ.

   Le premier diagramme en bâton représente la loi empirique (fréquences) d'une binomiale de paramètres $(n, \frac{\lambda}{n})$ obtenue à partir de 1000 simulations de cette loi tandis que le second diagramme en bâton représente la loi théorique (probabilités) de Poisson de paramètre λ.

3. Diagramme pour $n = 10$:

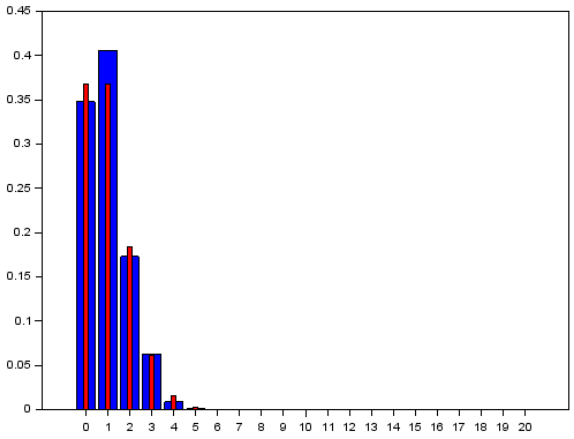


Diagramme pour $n = 100$:

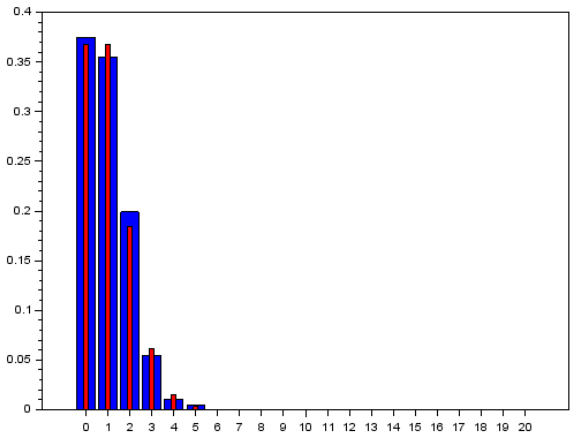
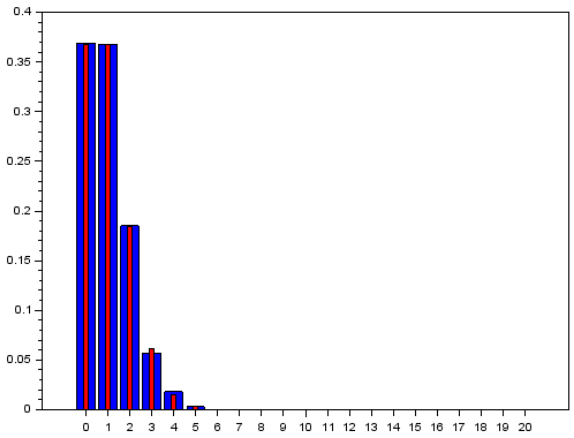


Diagramme pour $n = 1000$:



Conclusion : On remarque que lorsque n augmente, la loi (empirique) d'une binomiale de taille n et de paramètre λ/n converge vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 2. 1. Loi de X_k :

X_k correspond au numéro du tirage d'un entier **au hasard** dans $[\![1; n]\!]$ donc X_k suit une loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$:

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(X_k = i) = \frac{1}{n}$.

2. Loi de S_k :

(a) $S_k(\Omega) = [\![k; nk]\!]$. En effet,
• la variable S_k vaut au minimum k et ceci se produit lorsque les k premiers tirages ont donnés la boule numéro 1 ;
• elle vaut au maximum $n \times k$, situation qui se produit lorsque l'on tire k fois la boule numéro n ;
• S_k peut prendre toutes les valeurs intermédiaires si les boules prennent des valeurs intermédiaires.

(b) i. $S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = \sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$.

ii. Par formule des probabilités totales sur le s.c.e. $((S_k = j))_{k \leq j \leq nk}$, on a :

$$\forall i \in [\![k{+}1; n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{nk} P((S_k = j) \cap (S_{k+1} = i)) = \sum_{j=k}^{nk} P((S_k = j) \cap (S_k + X_{k+1} = i))$$

$$= \sum_{j=k}^{nk} P((S_k = j) \cap (X_{k+1} = i - j) = \sum_{j=k}^{nk} P((S_k = j)) \times P(X_{k+1} = i - j)$$

car S_k et X_{k+1} sont indépendantes par lemme des coalitions. Or $P(X_{k+1} = i - j) \neq 0$ si et seulement si $1 \leq i - j \leq n \Leftrightarrow i - n \leq j \leq i - 1 \Leftrightarrow j \leq i - 1$ (car $j > 0 \geq i - n$) :
on découpe la somme :

$$\forall i \in [\![k{+}1; n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} P((S_k = j)) \times \frac{1}{n} + \sum_{j=i}^{nk} P((S_k = j)) \times 0 = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P((S_k = j))$$

(c) i. Formule du triangle de Pascal :

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}$$

ii. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence sur i que :

$$\forall i \geq k+1, \quad \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

• Initialisation : pour $i = k{+}1$, la somme ne comporte qu'un seul terme : $\binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$.

• Hérédité : Supposons, pour un entier $i \geq k+1$ fixé que $\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$ et prouvons la formule pour $i+1$:

$$\sum_{j=k}^{(i+1)-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} = \dots$$

Par hypothèse de récurrence et avec la formule de Pascal :

$$\dots = \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} = \binom{i}{k} = \binom{(i+1)-1}{k}.$$

La formule est ainsi prouvée pour $i+1$.

iii. • Initialisation : $k = 1$:
$\forall\, i \in [\![1; n]\!]$:
- $P(S_1 = i) = P(X_1 = i) = \frac{1}{n}$ car X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$.
- $\frac{1}{n^1}\binom{i-1}{0} = \frac{1}{n}$
Donc $P(S_1 = i) = \frac{1}{n^1}\binom{i-1}{0}$.

• Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{H}_k$ est vraie.
Alors, pour tout $i \in [\![k{+}1, n]\!]$, $P(S_{k+1} = i) \underset{\text{d'après } 6.(b)}{=} \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P((S_k = j)) \underset{(H.R.)}{=} \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k}\binom{j-1}{k-1} =$

$\frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{j-1}{k-1} \underset{\text{d'après 7.(b)}}{=} \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k}$.
Alors, $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

• Conclusion : par principe de récurrence, $\mathcal{H}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Loi de T_n :
   (a) $T_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$. En effet :
   • si la première boule tirée est la numéro n (i.e. $X_1 = n$) alors $T_n = 1$.
   • Comme $S_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{X_i}_{\geq 1} \geq n$ alors T_n ne peut pas prendre de valeur strictement supérieure à n.
   • et T_n peut prendre toutes les valeurs entières intermédiaires entre 1 et n : si $k \in [\![2; n]\!]$, alors la suite de tirages :

$$\underbrace{1, 1, ...1}_{k-1 \text{ premiers tirages}} \quad , \overbrace{n-k+1}^{\text{k-ème tirage}} \qquad \text{(par exemple)}$$

   donne $T_n = k$.

   (b) $[T_n > k]$ signifie que la somme des numéros des boules à l'instant k n'est pas supérieure à n, autrement dit est inférieure ou égale à $n-1$:

$$[T_n > k] = [S_k \leq n-1]$$

   (c) $P[T_n > k] = P[S_k \leq n-1] = \sum_{i=k}^{n-1} P(S_k = i) = \sum_{i=k}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k}\sum_{i=k}^{n-1}\binom{i-1}{k-1} \underset{\text{d'après 7.(b)}}{=} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$

4. (a) $\forall n \geq k+1$, $P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{1}{n^k}\frac{(n-1+k+1)(n-1+k+2)....(n-1)}{k!} = \frac{1}{n^k}\frac{\prod_{i=1}^{k}(n-1+k+i)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^k}\frac{\prod_{i=1}^{k} n}{k!} = \frac{1}{n^k}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{k!}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}$$

   (b) $\lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = \lim_{n\to+\infty} (P(T_n > k-1) - P(T_n > k)) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!} = P(Y = k)$.

   Ainsi, $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers Y.

5.
```
function y=T(n)
    S=0
    Y=0
    while S <= (n-1) do
          tirage= grand(1,1,'uin',1,n)
          S= S+tirage
          y= y+1
    end
endfunction
```

6. (a) La fonction `freqT` renvoie un vecteur de taille n où chaque coordonnée numéro k est la fréquence empirique obtenue pour $(T_n = k)$ sur un échantillon de 100 000 simulations. Ce vecteur est représenté sur chaque graphique par les barres verticales.
   La fonction `loitheoY` renvoie un vecteur de taille n où chaque coordonnée numéro k est la valeur (théorique) de $P(Y = k) = \dfrac{k-1}{k!}$ (`prod(1:k)` est le produit des entiers compris entre 1 et k, c'est-à-dire $k!$, et aurait pu aussi être écrit `factorial(k)`). Ce vecteur est représenté sur chaque graphique par les croix.
   (b) On observe sur ces graphiques que, plus n est grand, plus les croix sont proches des extrémités supérieures des barres verticales, c'est-à-dire que la loi empirique de T_n se rapproche de la loi de Y.
   Ceci illustre la convergence en loi prouvée en question 13.

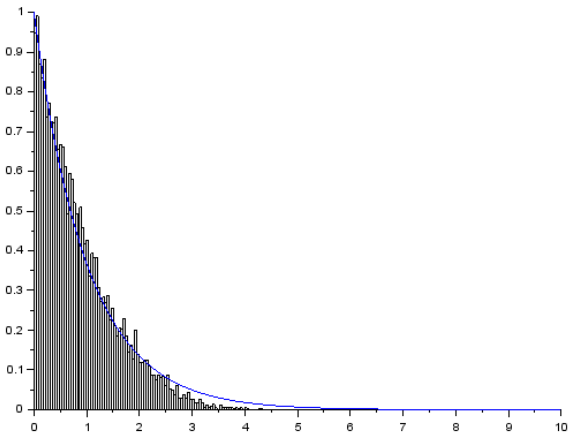
I. Convergence en loi : cas général

Exercice 3. Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0;1]$.
On note $M_n = max(U_1, U_2, ...U_n)$ et $X_n = n(1 - M_n)$.
Nous allons étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (X_n).

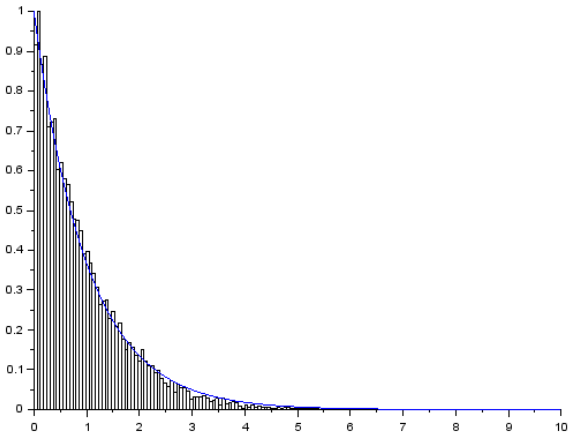
1.
```
function x=simulation_X(n)
    u=grand(1,n,'unf',0,1)
    m=max(u)
    x=n*(1-m)
endfunction
```
2.
```
n=input('entrer n:')
s=zeros(1,1000)
for k=1:1000 do
    s(k)=simulation_X(n)
end
histplot(100 ,s)
```
3. *TP7officielexo3 :*

```
function x=simulation_X(n)
   u=grand(1,n,'unf',0,1)
   m=max(u)
   x=n*(1-m)
endfunction

n=input('entrer n:')
s=zeros(1,1000)
for k=1:1000 do
    s(k)=simulation_X(n)
end
histplot(100 ,s)

function y=f(x)
    if x <0 then
        y=0
    else
        y=exp(-x)
    end
endfunction

x=0:0.1:10
fplot2d(x,f)
```

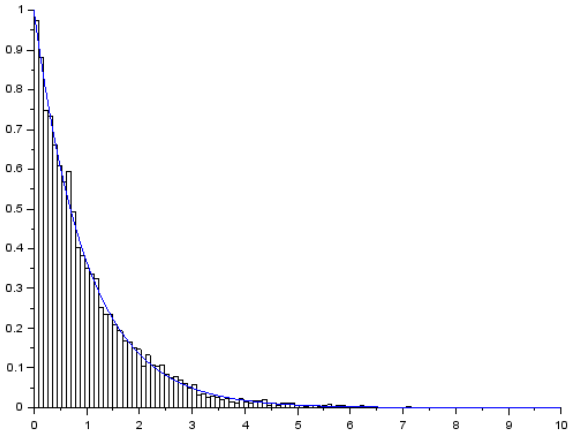
Graphe pour $n = 5$:



Graphe pour $n = 10$:



Graphe pour $n = 100$:



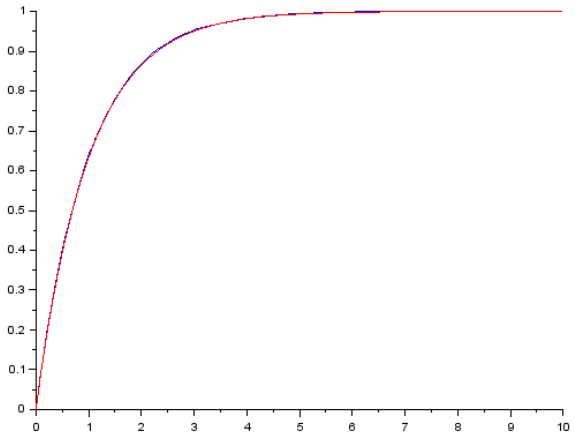
La loi de X_n semble converger vers une loi exponentielle de paramètre 1.

4. Nous allons vérifier la convergence en loi en terme de convergence de la fonction de répartition comme demandé dans la définition :

   (a)
   ```
   scf(1)
   x=linspace(0,10,1000)
   for k=1:1000 do
       F_emp(k)=sum(s<=x(k))/1000
   end
   plot2d(x,F_emp)
   ```

   (b)
   ```
   function y=F(x)
       if x<0 then
           y=0
       else
           y=1-exp(-x)
       end
   endfunction
   fplot2d(x,F,style=5)
   ```

   Pour $n = 100$, on obtient :



Lorsque n est grand, la fonction de répartition empirique de X_n se superpose à la fonction de répartition d'une exponentielle de paramètre 1.
La suite (X_n) semble donc converger en loi vers une exponentielle de paramètre 1.

Exercice 4.

1. $V(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$ donc $W(\Omega) = \mathbb{R}$ car $W = -\ln(V)$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_W(x) = P(W \leq x) = P(-\ln(V) \leq x) = P(\ln(V) \geq -x) = P(V \geq e^{-x}) = 1 - P(V \leq e^{-x})$
Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_W(x) = 1 - F_V(e^{-x})$
Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $F_V(e^{-x}) = 1 - e^{-e^{-x}}$
On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.
2. $X_i(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$ donc $\max_{i \in [\![1,n]\!]}(X_i) = \mathbb{R}^{+*}$
$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x) = P\left((X_1 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x)\right) = P(X_1 \leq x) \times \ldots \times P(X_n \leq x)$
(par indépendance des X_i)
$P(Y_n \leq x) = (P(X_1 \leq x))^n$ car tous les X_i suivant la même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$
$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_{Y_n}(x) = (F_{X_1}(x))^n$.
On a bien : $F_{Y_n}(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
3. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.
   (a) Facile. $Y_n = \max(X_i)$ donc :
   ```
   function Z=f(n)
   x=grand(1,n,'exp',1)
   Z=max(x)-log(n)
   endfunction
   ```
   (b) Les deux graphiques se ressemblent à s'y méprendre. La loi de Z_n ressemble donc beaucoup à la loi de W.
   On peut donc conjecturer que (Z_n) converge en loi vers W.
4. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.
   (a) Pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = P(Y_n - \ln(n) \leq x) = P(Y_n \leq x + \ln(n)) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$
   C'est le résultat attendu.
   (b) • Si $x < -\ln(n)$, on a donc $F_{Z_n}(x) = 0$.
   • Si $x \geq -\ln(n)$, alors $F_{Z_n}(x) = \left(1 - e^{-x-\ln(n)}\right)^n = \left(1 - e^{-x} \times e^{-\ln(n)}\right)^n$
   Or $e^{-\ln(n)} = e^{\ln(1/n)} = \dfrac{1}{n}$, donc $F_{Z_n}(x) = \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n$
   (c) Pour tout réel x, quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^{-x}}{n}$ est au voisinage de 0.
   On sait que si v est au voisinage de 0, $\ln(1 - v) \sim -v$, donc $\ln\left(1 - \dfrac{e^x}{n}\right) \sim -\dfrac{e^{-x}}{n}$
   Donc $n \times \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) \sim -e^{-x}$
   On a bien : $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$.

(d) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ln(n) \geq -x$ (il suffit de prendre $n_0 = 1$ si $x \geq 0$ et $n_0 = \lfloor e^{-x} \rfloor + 1$ si $x < 0$). Alors, pour $n \geq n_0$, $F_{Z_n}(x) = F_{Z_n}(x) = \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n$

Donc, si $n \geq n_0$, $\ln(F_{Z_n}(x)) = n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) \to -e^{-x}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-e^{-x}} = F_W(x)$

C'est la définition de la convergence en loi. $\boxed{(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } W}$