TP 9 : correction

1. La méthode d'inversion (de la fonction de répartition)

a) Etude théorique de la méthode

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.
On note F la fonction de répartition de X.

1. • On sait que la fonction de répartition d'une variable à densité est de classe C^1 en tout point où f est continue c'est-à-dire ici sur $\mathbb{R}$.
   Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$ est strictement positive sauf en un nombre fini de points.
   Ainsi, F est strictement croissante sauf en un nombre fini de points donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ par continuité.
   • De plus, par propriétés des fonctions de répartition, on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et Dresser le tableau de variations de F^{-1}.

   F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $F(\mathbb{R}) =]0;1[$.
2. • F est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$ donc sa bijection réciproque F^{-1} est définie sur $]0;1[$. Or on sait qu'une uniforme sur $[0;1]$ prend en fait ses valeurs dans $]0;1[$ donc $F^{-1}(U)$ est bien défini.
   • $Z(\Omega) = \mathbb{R}$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F_U(F(x))$ en composant l'inégalité par F croissante.
   Or $F(x) \in]0;1[$ donc $F_U(F(x)) = F(x)$ par définition de la fonction de répartition d'une uniforme sur $[0;1]$.
   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = F(x) \Longrightarrow F_Z = F$. Z suit donc la même loi que X.
3. `Z=F^{-1}(rand())`

b) Application à la simulation d'une exponentielle

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$ et $F : x \mapsto 1 - e^{-\lambda x}$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0;1[$ (car $f : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$).
2. Soit $y \in]0,1[$ fixé, résolvons l'équation $F(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

   $$F(x) = y \Leftrightarrow 1-e^{-\lambda x} = y \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1-y \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1-y) \text{ car } y < 1 \text{ donc } 1-y > 0 \ \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}$$

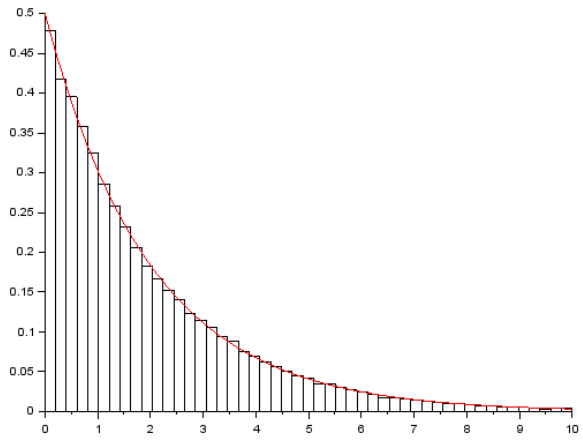
   Ainsi,

   $$\boxed{\forall y \in]0;1[,\ F^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}}$$

3. D'après le théorème 1, si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ alors $X = F^{-1}(U) = -\frac{\ln(1-U)}{\lambda}$ suit une loi exponentielle de paramètre λ, d'où la fonction suivante :

```
function M=inversion_exp(m,n,lambda)
    M=-log(1-rand(m,n))/lambda
endfunction
```

4.
```
n=input('Entrer la longueur n de l''échantillon: ')
lambda=input('Entrer le paramètre lambda: ')
X=inversion_exp(1,n,lambda)
x=linspace(0,10,50)
histplot(x, X)
plot2d(x,lambda*exp(-lambda*x), style=5)
```



On vérifie bien graphiquement que la loi empirique de la variable X simulée par méthode d'inversion coïncide avec la loi exponentielle car les fréquences de chaque classe coïncident avec les probabilités de ces classes pour une loi exponentielle (aire sous la courbe de la densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}_+$. .

c) Autres exemples

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition définie par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

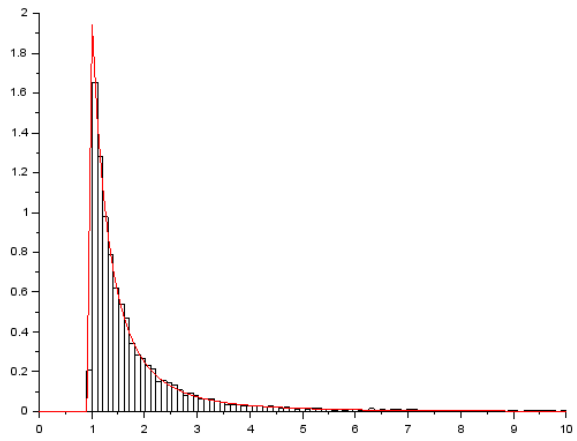
1. $X(\Omega) =]1; +\infty[$.
   $F(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ sur cet intervalle donc F est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $F'(x) = \frac{2}{x^3} > 0$.
   F est ainsi continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$; elle réalise une bijection de $]1; +\infty[$ dans $]0; 1[$.
2. Soit $y \in]0, 1[$ fixé, résolvons l'équation $F(x) = y$ d'inconnue $x \in]1; +\infty[$:

$$F(x) = y \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = y \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 1 - y \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{1-y}} \text{ car } x > 0$$

   Ainsi,

$$\boxed{\forall y \in]0; 1[,\ F^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y}}}$$

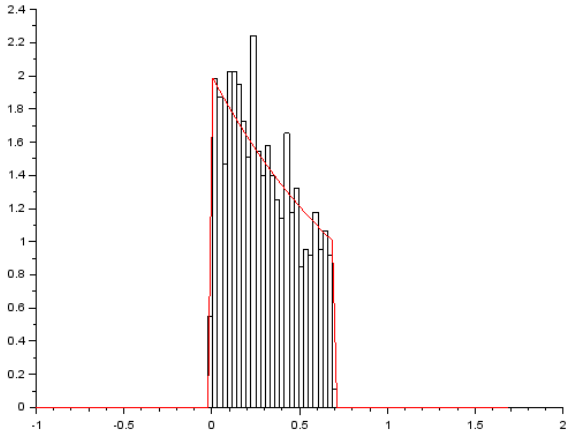
3.
```
clf
n=input('Entrer la longueur de l''échantillon:')
U=rand(1,n)
X=1 ./sqrt(1-U)
x=linspace(0,10,100)
histplot(x,X)
```
4.
```
function y=f(x)
    if x<1 then
        y=0
    else
        y=2 ./x.^3
    end
endfunction


fplot2d(x,f,style=5)
```



5. La loi empirique de la variable X simulée par méthode d'inversion coïncide bien avec la loi théorique souhaitée.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition définie par $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2(1-e^{-x}) & \text{si } x \in [0;\ln(2)] \\ 1 & \text{si } x \geq \ln(2) \end{cases}$.

1. $X(\Omega) =]0;\ln(2)[$.
   $F(x) = 2(1-e^{-x})$ sur cet intervalle donc F est dérivable sur $]0;\ln(2)[$ et $F'(x) = 2e^{-x} > 0$.
   F est ainsi continue et strictement croissante sur $]0;\ln(2)[$; elle réalise une bijection de $]0;\ln(2)[$ dans $]0;1[$.
2. Soit $y \in]0,1[$ fixé, résolvons l'équation $F(x) = y$ d'inconnue $x \in]0;\ln(2)[$:
   $$F(x) = y \Leftrightarrow 2(1-e^{-x}) = y \Leftrightarrow e^{-x} = 1 - \frac{y}{2} \Leftrightarrow x = -\ln\left(1-\frac{y}{2}\right)$$
   Ainsi,
   $$\boxed{\forall y \in]0;1[,\ F^{-1}(y) = -\ln\left(1-\frac{y}{2}\right)}$$
3.
```
clf
n=input('Entrer la longueur de l''échantillon:')
U=rand(1,n)
X=-log(1-U/2)
x=linspace(-1,log(2)+1,100)
histplot(x,X)
```
4.
```
function y=f(x)
    if x<0 then
        y=0
    elseif x > log(2) then
        y=0
    else
        y=2*exp(-x)
    end
endfunction


fplot2d(x,f,style=5)
```



5. La loi empirique de la variable X simulée par méthode d'inversion coïncide bien avec la loi théorique souhaitée.

2. La fonction cdfnor

```
-->cdfnor('PQ',1.96,0,1)
 ans  =

    0.9750021

-->cdfnor('PQ',0.7,0,1)
 ans  =

    0.7580363

-->cdfnor('PQ',3.4,2,2)
 ans  =

    0.7580363

-->cdfnor('X',0,1,0.975,1-0.975)
 ans  =

    1.959964

-->cdfnor('X',0,1,0.5,0.5)
 ans  =

    0.

-->cdfnor('X',1,3,0.75,0.25)
 ans  =

    3.0234693

-->cdfnor('X',1,3,0.95,0.05)
 ans  =

    5.9345609

-->cdfnor('Std',0.75,0.25,1,0)
 ans  =

    1.4826022
```

```
-->var=ans^2
 var  =

    2.1981093
```

3. Fonction de répartition empirique

```
-->U=[ 0 9 8 3 4 5 6 8 7 1 2 8 9 ]
 U  =


         column 1 to 9

    0.    9.    8.    3.    4.    5.    6.    8.    7.

         column 10 to 13

    1.    2.    8.    9.

-->U <=5
 ans  =

  T F F T T T F F F T T F F

-->sum(U <=5)
 ans  =

    6.
```

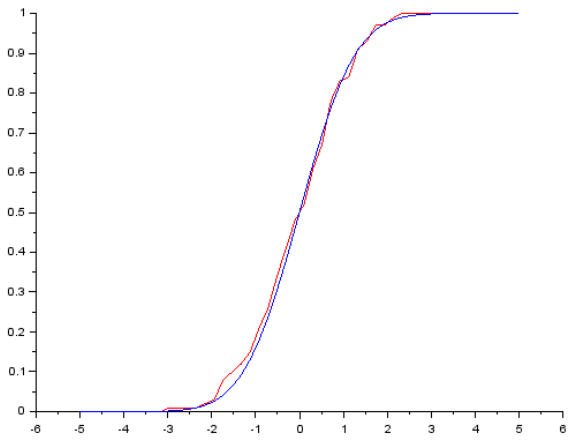
L'instruction `U <=5` renvoit un tableau dont les cases contiennent "vrai" si la valeur de la case de U est inférieure à 5 ; "faux" sinon.
"Vrai" est codé par 1 et "faux" par 0 en Scilab donc `sum(U <=5)` renvoit le nombre de valeurs inférieures à 5.

La fréquence d'un évènement A est définie par $f = \frac{\text{effectif de A}}{\text{effectif total}}$ d'où l'instruction Scilab :

```
-->f=sum(U<=5)/length(U)
 f  =

    0.4615385
```

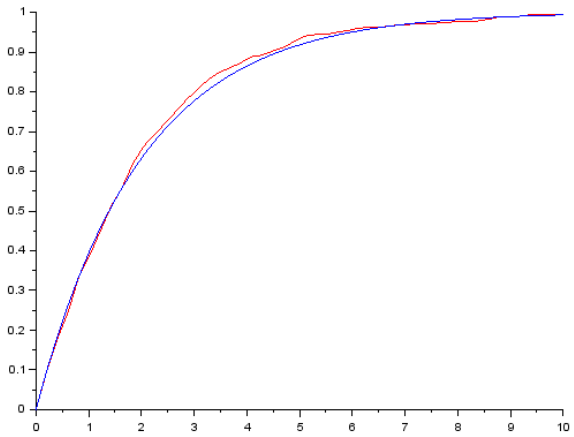
Exercice 5. 1.

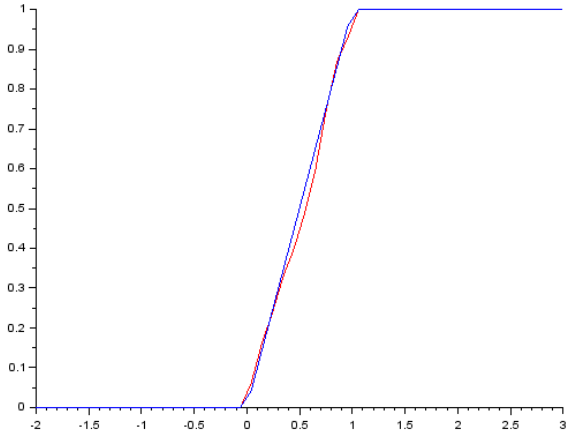
```
n=input('Entrer n: ')
U=grand(1,n,'nor',0,1)

x=linspace(-5,5,50)
F_emp=zeros(1,50)
F=zeros(1,50)

for k=1:50 do
     F_emp(k)=sum(U<=x(k))/n
     F(k)=cdfnor('PQ',x(k),0,1)
end

plot2d(x,F_emp,style=5)
plot2d(x,F, style=2)
```



On remarque que lorsque n est grand, la fonction de répartition empirique de la loi se superpose avec sa fonction de répartition théorique, ce qui toujours le cas car la fréquence d'un évènement converge toujours vers la probabilité de cet évènement lorsque le nombre de simulations indépendantes de l'expérience tend vers $+\infty$ (loi faible des grands nombres).

2.
```
n=input('Entrer n: ')
U=grand(1,n,'exp',1/0.5)

x=linspace(0,10,50)
F_emp=zeros(1,50)
F=zeros(1,50)

for k=1:50 do
     F_emp(k)=sum(U<=x(k))/n
end

plot2d(x,F_emp,style=5)
plot2d(x,1-exp(-0.5*x), style=2)
```



3.
```
n=input('Entrer n: ')
U=grand(1,n,'unf',0,1)

x=linspace(-2,3,50)
F_emp=zeros(1,50)
F=zeros(1,50)

for k=1:50 do
     F_emp(k)=sum(U<=x(k))/n
```

```
end

plot2d(x,F_emp,style=5)

function y=F(x)
  if x<0 then
      y=0
  elseif x>1 then
      y=1
   else
      y=x
   end
endfunction
fplot2d(x,F, style=2)
```