TD : Calcul matriciel

I. Révisions sur le calcul matriciel

a) Remarques générales sur le calcul matriciel

Le calcul matriciel n'a pas autant de propriétés que le calcul numérique :

- On ne sait faire que des produits et des combinaisons linéaires de matrices : il est interdit d'inventer d'autres opérations ! Par exemple, il est interdit de prendre la racine carrée d'une matrice (ça n'a pas de sens) ou de composer une matrice par quelque fonction que ce soit !

- En particulier, **La division de matrices n'existe pas !** . Pour simplifier par une matrice, on ne peut donc pas diviser par la matrice (n'a pas de sens ! !). En revanche, SI LA MATRICE EST INVERSIBLE, on peut multiplier par son inverse pour simplifier par A, car c'est l'équivalent de la division pour les nombres.

- La somme reste commutative mais LE PRODUIT N'EST généralement PAS COMMUTATIF : $AB \neq BA$.
Les formules habituelles de développement telles que les identités remarquables, la formule du binôme,...etc...ne sont donc valables **que si les matrices commutent**, il faut donc toujours bien réfléchir à la validité d'une formule lorsqu'on manipule des matrices !
Par exemple, si A et B ne commutent pas alors $(AB)^n \neq A^n B^n$. Aussi, les identités remarquables ne sont pas valables :

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

- Il est possible de factoriser par une matrice, mais à condition qu'elle soit bien en facteur (produit) d'une MATRICE DE MEME TAILLE dans chacun des termes de la somme, et **du même côté !** : pour les matrices, on parle donc de **factoriser à gauche par une matrice**, ou de **factoriser à droite par une matrice** .
Exemples :
1. Il est impossible de factoriser la somme $AB + CA$ car A n'est pas en facteur du même côté.
2. $BA + CA = (B+C)A$: on a factorisé à droite par A, en revanche il était bien sûr interdit de factoriser à gauche par A !
3. Attention erreur classique : $A^2 - 4A \neq A(A-4)$!!!. En effet, comme $A^2 = A \times A$, il faut aussi voir A comme un produit de 2 matrices : $A = A \times I$: on obtient donc : $A^2 - 4A = A \times A - 4A \times I = A \times A - A \times 4I = A(A-4I)$. Ainsi, $\mathbf{A^2 - 4A = A(A - 4I)}$.

b) Polynôme d'une matrice carrée, polynôme annulateur

Définition 1 : polynôme d'une matrice

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ un polynôme et A une matrice carrée.
On note $P(A)$ la matrice $P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 I$.

Exemple

Soit $P(X) = X^2 + 1$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculons $P(A)$:

Définition 2

On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0$.

Exemple

Le polynôme $P(X) = X^2 + 1$ est annulateur de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Propriété 1 : cas d'utilisation des polynômes annulateurs

Si on connait un polynôme annulateur d'une matrice A, on l'utilise toujours pour répondre à deux questions :

1. **Inversibilité de A :** le polynôme annulateur sert à prouver que A est inversible et en même temps à trouver son inverse ou à prouver que A n'est pas inversible :
   - S'il y a la matrice I dans $P(A)$: on prouve que A est inversible et on trouve son inverse.
     Par exemple, si $A^2 + I = 0$ alors $-A^2 = I$ donc $(-A)A = A(-A) = I$ donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = -A$.
   - Si la matrice I n'intervient pas dans $P(A)$, la plupart du temps on montrer par l'absurde que A n'est pas inversible .
     Par exemple, soit A une matrice non nulle telle que $A^3 = 0$. Montrons par l'absurde que A n'est pas inversible :
     On suppose que A est inversible, alors on peut simplifier l'équation $A^3 = 0$ par A en multipliant à gauche par son inverse :
     Alors, on a $A^{-1}A^3 = A^{-1}0$ donc $A^2 = 0$ et en remultipliant par A^{-1}, on a $A = 0$: contradiction car A non nulle.
     On obtient une contradiction donc l'hypothèse était fausse : A n'est pas inversible
2. **Valeurs propres possibles de A :** On utilise la propriété suivante : Si P est un polynôme annulateur de A alors les seules valeurs propres **possibles** de A sont les racines de P.

c) Matrices inversibles

Définition 3

Une matrice carrée A est dite ***inversible*** *s'il existe une autre matrice quelconque, que l'on note alors A^{-1} telle que $AA^{-1} = I$ et $A^{-1}A = I$.*
A^{-1} est alors appelée la matrice inverse de A.

Il a été prouvé qu'il suffit qu'une seule des 2 égalités soit vérifiée pour que A soit bien inversible.

Intérêt : Lorsqu'une matrice est inversible, on peut simplifier par A dans une égalité en multipliant par son inverse :
Par exemple, soit A une matrice inversible, cherchons les matrices M telles que $AM = 0$: on multiplie par A^{-1} à gauche : alors, $A^{-1}AM = A^{-1}0$ donc $IM = 0$ soit $M = 0$.

Méthode

Il y a différentes méthodes permettant de vérifier si une matrice carrée est inversible (et de calculer éventuellement son inverse) :

1. **Si on vous suggère l'inverse :** Il suffit alors de multiplier les deux matrices et de vérifier qu'on obtient bien l'identité.

2. **Si on a trouvé un polynôme annulateur de A :** On revient à la définition d'une matrice inversible donnée ci-dessus (cf exercice 1 2. et exercice 2 1.) : - Pour prouver que A est inversible : on met l'égalité sous la forme $AB = I$.
   - Pour prouver que A n'est pas inversible : on suppose qu'elle est inversible pour pouvoir utiliser la définition et on raisonne jusqu'à tomber sur une contradiction (**raisonnement par l'absurde**).

3. **Si on ne connait pas d'égalité sur A :**
   (a) **Cas particulier où on veut montrer que la matrice n'est pas inversible :** On vérifie si l'une des colonnes (ou des lignes) de A est combinaison linéaire des autres colonnes grâce à la propriété suivante :

Propriété 2

Une matrice carrée n'est pas inversible si et seulement si ses colonnes (ou ses lignes) sont **liées**.

(b) **Cas général :** on utilise la méthode du pivot pour triangulariser la matrice car SEULES LES MATRICES TRIANGULAIRES vérifient la propriété : une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exercice 1.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P(X) = (X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse (sans faire de pivot).
3. Vérifier vos résultats en utilisant maintenant la méthode du pivot.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant : $\begin{cases} -x+y & = & 3 \\ y-z & = & 1 \\ -3x+4y-3z & = & -2 \end{cases}$; sans faire de pivot.

Exercice 2.
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P(X) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A. En déduire, par un raisonnement par l'absurde que A n'est pas inversible.
   Justifier par le même raisonnement que $A - I$ n'est pas inversible.
2. Vérifier par la méthode du pivot que A n'est effectivement pas inversible.
3. Utiliser la troisième méthode pour prouver autrement que A n'est pas inversible.

Exercice 3.
Vérifier sans calculs que ces matrices ne sont pas inversibles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété 3

- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont deux matrices inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- En particulier, si A est une matrice inversible et n un entier naturel, alors A^n est inversible et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

c) Calculs des puissances d'une matrice

Rappels : • Les puissances entières positives d'une matrice sont toujours définies, par : $A^0 = I$, et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A \times A \times A .... \times A$ (n fois) .
• Les puissances entières strictement négatives d'une matrice sont définies uniquement si A est inversible par : $\forall n > 0$, $A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$.
Remarque : On peut vous faire trouver la formule de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis vous demander de vérifier si la formule est toujours vraie pour les puissances négative. Dans ce cas, il faut utiliser le fait que si $n > 0$, A^{-n} est l'inverse de A^n :il suffit alors de vérifier que la matrice suggérée est bien l'inverse de A^n en les multipliant pour vérifier que l'on obtient l'identité.

Calculer toutes les puissances nièmes d'une matrice n'est pas évident car, ne serait-ce que pour les puissances positives, il faudrait calculer $A \times A \times A$... jusqu'à l'infini ! !
Il y a tout de même trois méthodes principales qui permettent, dans certaines situations, de calculer A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$:

Méthode

1. **Si on vous donne le résultat :** le prouver par récurrence . Sinon :

2. **Utiliser la réduction de la matrice :** cf II b) i) : Si, au cours du sujet, la matrice A a été réduite (diagonalisée ou trigonalisée), on utilise la réduction pour calculer les puissances de A.

3. **Utiliser la formule du binôme de Newton :** Si une matrice a été mise sous forme de somme (ou combinaison linéaire) de matrices plus simples (dont les puissances sont plus simples à calculer) et qui commutent, alors on utilise la formule du binôme de Newton.
Rappels : formule du binôme de Newton

Théorème 4

Soient A et B deux matrices qui commutent ($AB = BA$). Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k A^{n-k}$$

4. **Trouver une formule qui marche pour tout n :** En calculant les premières puissances de la matrice, on peut remarquer : soit que les puissances sont nulles à partir d'un certain rang, soit remarquer qu'il semble y avoir une forme générale qui marche pour tout n. On Vérifie alors que cette forme marche bien pour toute puissance en faisant une récurrence.

Exercice 4.

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. On pose $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer T^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. **Utilisation des puissances :** On considère les suites (a_n) ; (b_n) et (c_n) définies par a_0, b_0, c_0 et , $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n \\ b_{n+1} &= 3a_n + 2b_n \\ c_{n+1} &= -b_n + 2c_n \end{cases}$. En utilisant 2) calculer a_n, b_n, c_n en fonction de n, a_0, b_0, et c_0.

Exercice 5.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Nous allons utiliser 2 méthodes différentes pour calculer A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. **Première méthode :**
   (a) Exprimer A^2 en fonction de A et I. Donner un polynôme annulateur de A.
   En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.

   (b) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n I + b_n A$.
   (c) Expliciter a_n et b_n en fonction de n et en déduire l'expression de A^n en fonction de A et I.
2. **Seconde méthode :** Soit $B = A - 2I$.
   (a) Calculer B^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire A^n en fonction de A et I, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II. Réduction de matrices

a) Définitions

Définition 4 : éléments propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
*Un réel λ est appelé **valeur propre** de A s'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $AX = \lambda X$.*
*La matrice X est alors appelée **un vecteur propre** de A, associé à la valeur propre λ.*

Méthode
On utilise cette définition lorsque les vecteurs propres vous sont suggérés dans l'énoncé.

Exercice 6.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A ; à quelle valeur propre sont-ils respectivement associés ?

b) Méthode de recherche des éléments propres

Théorème 5 :méthode générale de calculs des valeurs propres

Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
L'ensemble des valeurs propres d'une matrice A est appelé spectre de A et noté $sp(A)$.

Preuve
(partielle) :
Soit λ un réel tel que $A - \lambda I$ est inversible. Montrons que λ n'est pas valeur propre de A :
Résolvons l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors $AX - \lambda X = 0$ soit $(A - \lambda I)X = 0$.
Comme $(A - \lambda I)$ est inversible, on multiplie les deux membres de l'égalité à gauche par $(A - \lambda I)^{-1}$, on obtient $X = 0$.
Donc il n'existe pas $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ donc λ n'est pas valeur propre de A par définition d'une valeur propre.

On admet que si $A - \lambda I$ n' est pas inversible alors λ est valeur propre de A.

Méthode
On utilise ce théorème si les valeurs propres de A sont inconnues (ne sont pas suggérées par l'énoncé) .
En pratique, on triangularise la matrice $A - \lambda I$ par la méthode du pivot de Gauss pour vérifier pour quelles valeurs de λ elle n'est pas inversible. On notera T_λ la matrice triangulaire obtenue.

Exercice 7.
Déterminer le spectre des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Théorème 6 :Cas particulier où l'on connait un polynôme annulateur de A

Si P est un polynôme annulateur de A alors les seules valeurs propres **possibles** de A sont les racines de P.

Exercice 8.

1. Déterminer, sans faire de pivots, les valeurs propres des matrices des exercices 1 et 2, en vous aidant des résultats obtenus dans ces exercices.

2. Soit la matrice C de l'exercice 7.
   Calculer $(C-I)^3$ puis prouver sans pivots que 1 est la seule valeur propre de C.

Théorème 7 : méthode générale de calculs des vecteurs propres

Soit λ l'une des valeurs propres de A.
On calcule le **sous-espace propre de A associé à la valeur propre** λ, notée $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\boxed{E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}); AX = \lambda X\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}); (A-\lambda I)X = 0\}}$$

Toute matrice colonne non nulle appartenant à $E_\lambda(A)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Méthode
On utilise cette méthode si aucun vecteur propre n'est suggéré dans l'énoncé ou s'il en manque pour former une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Pour trouver $E_\lambda(A)$, on doit résoudre l'équation $(A-\lambda I)X = 0$, d'inconnue le vecteur colonne X.
Mais si on a déjà triangularisé $A - \lambda I$ en une matrice T_λ, cette équation est équivalente à l'équation plus simple $T_\lambda X = 0$.
On résout donc directement cette dernière équation. (cf les exercices suivants)

Définition 5 : matrices semblables

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont ***semblables*** *s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.*

Définition 6 : matrice diagonalisable

On dit qu'une matrice A est ***diagonalisable*** *si elle est semblable à une matrice diagonale c'est-à-dire s'il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que :*

$$A = PDP^{-1}$$

Théorème 8 : diagonalisation d'une matrice

S'il existe une **base** $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A alors A est **diagonalisable**.
Plus exactement :
- Si on prend P une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de la base $\mathcal{B}$ (remarque : P est inversible)
- Si on prend D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres associées aux vecteurs propres de P

Alors :

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

c) Utilisations de la réduction

i) Calcul des puissances d'une matrice : nouvelle méthode

Calculer la puissance n-ième d'une matrice est souvent complexe. Si, en calculant les premières puissances, on ne voit pas une forme apparaître qui pourrait convenir à toutes les puissances, et si l'on n'est pas dans le cadre de l'utilisation de la formule du binôme de Newton, une troisième possibilité est de diagonaliser la matrice : la mettre sous la forme $A = PDP^{-1}$.
En effet, on peut alors prouver (à toujours reprouver) : $A^n = PD^nP^{-1}$, il ne reste plus qu'à faire le produit de trois matrices connues.

Exercice 9.
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Déterminer une base de chacun des sous espaces propres de A. On notera X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs obtenus.
3. Vérifier que (X_1, X_2, X_3) forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. Expliciter une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Donner explicitement A^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Résolution d'équations matricielles

Résoudre des équations sur des matrices inconnues peut être très complexe (par exemple : 9 coefficients inconnus à trouver pour une matrice carrée d'ordre 3, ce qui donne souvent une système de 9 équations à 9 inconnues : il y a intérêt à ce que le système soit simple à résoudre). C'est pourquoi on effectue un changement de variable pour se ramener à une équation équivalente plus simple car faisant intervenir la matrice diagonale associée.

Exercice 10.
Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le spectre de B.
2. Déterminer une base de chacun des sous-espace propres de B. On notera X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs obtenus.
3. Vérifier que (X_1, X_2, X_3) forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Expliciter une matrice P inversible de première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et une matrice D diagonale vérifiant $d_{3,3} = 9$ telles que $B = PDP^{-1}$.
5. On souhaite déterminer l'ensemble appelé **commutant de B** suivant :

$$C_B = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); BM = MB\}$$

(c'est l'ensemble des matrices qui commutent avec B)

(a) Montrer que C_B est un espace vectoriel.

(b) On pose le changement de variable $N = P^{-1}MP$.

i. Exprimer M en fonction de N.

ii. Montrer qu'une matrice M appartient à C_B si et seulement si N vérifie l'équation $DN = ND$.

iii. Montrer qu'une matrice N vérifie $DN = ND$ si et seulement si $N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d, e des réels.

iv. En déduire les matrices de C_B.

Exercice 11.
On considère dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation :

$$(\mathcal{E}) \quad : \qquad X^2 - 3X + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres de A seront rangées dans l'ordre décroissant.
2. En effectuant un changement de variable judicieux, justifier que l'équation $(\mathcal{E})$ est équivalente à l'équation :

$$(\mathcal{E}') \quad : \qquad Y^2 - 3Y + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sur la nouvelle variable Y.
3. Montrer que toute solution de $(\mathcal{E}')$ commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En déduire que Y est diagonale.
4. Résoudre $(\mathcal{E}')$ puis en déduire les solutions de $(\mathcal{E})$ en fonction de P et de P^{-1} .