Correction du TD : Révisions de probabilités

I. Révisions de variables aléatoires discrètes

Exercice 1.

1. On commence toujours par donner le support : $X(\Omega) = [\![1;4]\!]$.

   Ensuite puisque la probabilité de chaque face est proportionnelle à son numéro, il existe une constante a telle que :

   $$P(X=1) = a \quad , \quad P(X=2) = 2a \quad , P(X=3) = 3a \quad , \quad P(X=4) = 4a.$$

   Pour déterminer a, on remarque que pour une loi de probabilité, toutes les probabilité doivent être positives et leur somme vaut 1. Donc a est positif et :

   $$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = a + 2a + 3a + 4a = 10a = 1 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{10}.$$

   Enfin on en déduit que :

   $$P(X=1) = \frac{1}{10} \quad , \quad P(X=2) = \frac{1}{5} \quad , P(X=3) = \frac{3}{10} \quad , \quad P(X=4) = \frac{2}{5}.$$

2. X est à support fini donc admet une espérance. De plus :

   $$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{4} kP(X=k) = \frac{1}{10} + 2\times\frac{2}{10} + 3\times\frac{3}{10} + 4\times\frac{4}{10} = \frac{1+4+9+16}{10} = \frac{30}{10} = 3.$$

3. X est à support borné donc admet des moments de tous ordres, et en particulier un moment d'ordre 2 et une variance. De plus par théorème de transfert :

   $$E(X^2) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{4} k^2 P(X=k) = \frac{1}{10} + 4\times\frac{2}{10} + 9\times\frac{3}{10} + 16\times\frac{4}{10} = \frac{1+8+27+64}{10} = \frac{100}{10} = 10.$$

   Enfin par formule de Koenig-Huyghens :

   $$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 10 - 9 = 1.$$

4. Par théorème de transfert, on a :

   $$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k \in X(\Omega)} \frac{1}{k} P(X=k) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} P(X=k) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{10} + \frac{1}{3}\times\frac{3}{10} + \frac{1}{4}\times\frac{4}{10} = \frac{1+1+1+1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

5. Par linéarité de l'espérance et propriétés de la variance, on a :

   $$E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 2\times 3 + 3 = 9 \quad \text{et} \quad V(2X+3) = 2^2 V(X) = 4\times 1 = 4.$$

Exercice 2.

1. On commence par chercher le support de X : pour enlever toutes les boules d'une couleur il faut au minimum 2 tirages (pour enlever les blanches, 4 au minimum pour enlever les noires) et au maximum 5 tirages (si on se retrouve avec une blanche et une noire après 4 tirages, au tirage d'après, on n'a plus qu'une couleur ; sinon c'est qu'on a deux boules de la même couleur et qu'on a déjà fini). D'où

$$X(\Omega) = [\![2;5]\!]$$

On cherche alors une à une les probabilités des valeurs entre 2 et 5 en écrivant les évènements en fonction des tirages élémentaires, notés :

B_i : "On tire une blanche au i-ème tirage' , N_i : "On tire une noire au i-ème tirage"

– $(X = 2)$ signifie qu'on n'a plus qu'une couleur après 2 tirages : ce sont nécessairement les blanches qui ont été enlevées donc :

$$(X = 2) = B_1 \cap B_2$$

Par formule des probabilités composées, on en déduit que :

$$P(X = 2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

– $(X = 3)$ signifie qu'on n'a plus qu'une couleur après 3 tirages mais qu'on en avait encore deux après 2 tirages : ce sont nécessairement les blanches qui ont disparu, mais il en restait une après le deuxième tirage donc :

$$(X = 3) = [(..)_1 \cap (..)_2 \cap B_3] \cup [(..)_1 \cap (..)_2 \cap B_3] \cup ... \cup [(..)_1 \cap (..)_2 \cap B_3$$

Lors des deux premiers tirages, on doit nécessairement avoir tiré l'autre blanche et une noire, il n'y a donc que deux possibilités :

$$(X = 3) = [B_1 \cap N_2 \cap B_3] \cup [N_1 \cap B_2 \cap B_3]$$

Par incompatibilité de la réunion et formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P([B_1 \cap N_2 \cap B_3]) + P([N_1 \cap B_2 \cap B_3]) = P(B_1)P_{B_1}(N_2)P_{B_1\cap N_2}(B_3) + P(N_1)P_{N_1}(B_2)P_{N_1\cap B_2}(B \\ &= \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4}{6 \times 5 \times 4} + \frac{4 \times 2}{6 \times 5 \times 4} \\ &= \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

– $(X = 4)$ signifie qu'on a retiré une couleur au 4ème tirage, mais que les deux étaient encore présentes après le 3e. La couleur retirée peut être soit le blanc soir le noir.
Pour retirer les noires, il faut avoir tiré les 4 donc avoir tiré 4 noires.
Pour tirer les blanches, il faut avoir tiré une blanche au 4e tirage, et précédemment une blanche et 2 noires :

$$(X = 4) = [N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4] \cup [(..)_1 \cap (..)_2 \cap (..)_3 \cap B_4] \cup [(..)_1 \cap (..)_2 \cap (..)_3 \cap B_4] \cup ... \cup [(..)_1 \cap (..)_2 \cap (..)_3 \cap B_4]$$

On énumère les possibilités pour tirer une blanche et 2 noires aux trois premiers tirages :

$$(X = 4) = [N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap N_4] \cup [B_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4] \cup [N_1 \cap B_2 \cap N_3 \cap B_4] \cup [N_1 \cap N_2 \cap B_3 \cap B_4]$$

Par incompatibilité 2 à 2 des évènements de la réunion et formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{6 \times 5} + \frac{2}{6 \times 5} + \frac{2}{6 \times 5} + \frac{2}{6 \times 5} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

– $(X = 5)$ peut être décomposé de la même manière ; mais comme c'est le dernier évènement de la loi, on peut obtenir sa probabilité à l'aide de la somme des probabilités égale à 1.

$(X = k)_{2 \leq k \leq 5}$ est un système complet d'évènements donc :

$$P(X = 2)+P(X = 3)+P(X = 4)+P(X = 5) = 1 \Longleftrightarrow P(X = 5) = 1-\frac{1+2+4}{15} = \frac{15-7}{15} = \frac{8}{15}.$$

2. Pour une variable discrète, les évènements avec une inégalité sur la variable aléatoire (qui correspondent à la fonction de répartition ou à sont contraire) s'obtiennent toujours, lorsque la loi est connue, en décomposant l'évènement avec inégalité en une réunion d'évènements de la loi :

$$(X \leq 4) = (X = 2) \cup (X = 3) \cup (X = 4)$$

La réunion est incompatible donc :

$$P(X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1+2+4}{15} = \frac{7}{15}.$$

Autre possibilité : on passe par le contraire qui est aussi une inégalité pour voir si la réunion est plus simple :

$$\overline{(X \leq 4)} = (X > 4) = (X = 5)$$

(il n'y a qu'une possibilité donc un seul évènement de la loi) donc

$$P(\overline{(X \leq 4)}) = P(X = 5) = \frac{8}{15} \quad \text{et} \quad P(X \leq 4) = 1 - P(\overline{(X \leq 4)}) = \frac{7}{15}.$$

3. X est à support fini donc admet des moments de tous ordres, et en particulier une espérance et un moment d'ordre deux, donc une variance. De plus :

$$E(X) = \sum_{k=2}^{5} kP(X = k) = 2 \times \frac{1}{15} + 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{8}{15} = \frac{2+6+16+40}{15} = \frac{64}{15}$$

puis par théorème de transfert :

$$E(X^2) = \sum_{k=2}^{5} k^2 P(X = k) = 4 \times \frac{1}{15} + 9 \times \frac{2}{15} + 16 \times \frac{4}{15} + 25 \times \frac{8}{15} = \frac{4+18+64+200}{15} = \frac{286}{15}$$

Enfin par formule de Koenig-Huyghens on obtient :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{286}{15} - \frac{64^2}{15^2} = \frac{286 \times 15 - 64^2}{225} = \frac{2860 + 1430 - [3600 + 16 + 480]}{225} = \frac{4290 - 4096}{225} = \frac{194}{225}.$$

Exercice 3.

1. On déterminer d'abord le support de X : la première boule rouge peut sortir dès le premier tirage, et au plus tard à l'avant-dernier (si il reste les 2 boules rouges avant ce tirage, on est sûr d'en sortir une) donc au tirage n^o $n-1$:

$$X(\Omega) = [\![1; n-1]\!]$$

Calculons les premières probabilité pour comprendre le fonctionnement, puis faisons un cas général :

$$(X = 1) = B_1 \quad , \quad (X = 2) = R_1 \cap B_2 \quad , \quad (X = 3) = R_1 \cap R_2 \cap B_3$$

donc par probabilité composées :

$$P(X_1) = \frac{2}{n} \quad , \quad P(X = 2) = P(R_1)P_{R_1}(B_2) = \frac{n-2}{n} \times \frac{2}{n-1} = \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$$

et

$$P(X = 3) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1 \cap R_2}(B_3) = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{2}{n-2} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.$$

Passons au cas général : pour $4 \leq k \leq n-1$:

$$(X = k) = R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k$$

donc par formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= P(R_1)P_{R_1}(R_2)\dots P_{R_1\cap R_2\cdots\cap R_{k-2}}(R_{k-1})P_{R_1\cap R_2\cdots\cap R_{k-1}}(B_k)\\
&= \frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n-4}{n-2}\times\cdots\times\frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)}\times\frac{2}{n-(k-1)}\\
&= \frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n-4}{n-2}\times\cdots\times\frac{n-k}{n-k+2}\times\frac{2}{n-k+1}\\
&= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)\times\cdots\times(n-k)}{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)}\times 2=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

Enfin cette formule est encore valable pour les valeurs de k étudiées à part ($k=1$, 2 et 3, il suffit de vérifier) donc on obtient : pour tout $k\in[\![1;n-1]\!]$,

$$P(X=k)=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

Calculons alors l'espérance de X : x est à support fini donc admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k(n-k)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\left[n\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right]\\
&= \frac{2}{n(n-1)}\left[n\times\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=\frac{2n^2(n-1)}{2n(n-1)}-\frac{2n(n-1)(2n-1)}{6n(n-1)}\\
&= n-\frac{2n-1}{3}=\frac{3n-2n+1}{3}=\frac{n+1}{3}.
\end{aligned}$$

2. Comme on ne connaît pas la loi de $\frac{1}{n-X}$ mais celle de X et que ce n'est pas linéaire, on utilise le théorème de transfert :

$$E\left(\frac{1}{n-X}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}P(X=k)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2(n-k)}{(n-k)n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}1=\frac{2}{n(n-1)}\times(n-1)=\frac{2}{n}.$$

3. Si on tire la première boule rouge lors du tirage $n^\circ X$, à ce moment là on a tiré $X-1$ boules rouges aux tirages précédents et une boule blanche. Il reste donc :

$$Y=n-2-(X-1)=n-2-X+1=n-1-X$$

boules rouges dans l'urne. On en déduit alors par linéarité de l'espérance que y admet une espérance et :

$$E(Y)=n-1-E(X)=n-1-\frac{n+1}{3}=\frac{3n-3-(n+1)}{3}=\frac{3n-3-n-1}{3}=\frac{2n-4}{3}.$$

4. Y s'exprime en fonction de X, on voit donc que :

$$Y(\Omega)=\{n-1-k,\ \text{tq } k\in[\![1;n-1]\!]\}=[\![0;n-2]\!]$$

De plus pour tout $k\in[\![0;n-2]\!]$ on a :

$$(Y=k)=(n-1-X=k)=(-X=k-n+1)=(X=n-k-1)$$

donc on obtient avec la loi de X :

$$P(Y=k)=P(X=n-k-1)=\frac{2(n-[n-k-1])}{n(n-1)}=\frac{2(n-n+k+1)}{n(n-1)}=\frac{2(k+1)}{n(n-1)}.$$

Exercice 4.

1. On cherche d'abord le support de X : pour obtenir au moins une boule blanche et une noire, il faut au minimum 2 tirages. De plus comme les tirages se font avec remise, on peut tirer indéfiniment une seule couleur donc :
$$X(\Omega) = [\![2 : +\infty[\![$$
Décomposons à présent l'évènement $(X = k)$, pour k fixé supérieur ou égal à 2 : il faut obtenir lors du tirage k au moins une noire et une blanche pour la première fois. L'évènement ne dépend que des k premiers tirages, aucun tirage n'est imposé, et le premier tirage peut être une noire ou une blanche (aucun des deux n'est imposé) donc on aura forcément la forme :
$$(X = k) = [B_1 \cap \cdots \cap (..)_{k-1} \cap (..)_k] \cup \cdots \cup [B_1 \cap \cdots \cap (..)_{k-1} \cap (..)_k] \cup [N_1 \cap \cdots \cap (..)_{k-1} \cap (..)_k] \cup \cdots \cup [N_1 \cap \cdots \cap (..)_{k-1} \cap (..)_k]$$
Etudions alors le second tirage, où les tirages ne doivent pas s'arrêter (puisqu'ils doivent s'arrêter uniquement au k-ième) : si on a eu B_1, le tirage B_2 est possible (on n'a toujours pas eu le 1ère noire donc on continue bien les tirages) ; par contre si on obtient N_2, les tirages s'arrête.
On en déduit que seul B_2 est possible ; ensuite de manière similaire, tous les tirages du 2e au $(k-1)$-ième doivent donner une blanche, et le k-ième donne une noire.

De même si on a tiré un noire au premier tirage, on doit obligatoirement tirer des noires jusqu'au $(k-1)$-ième tirage, et enfin une blanche au k-ième :
$$(X = k) = [B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k] \cup [N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k]$$
Par incompatibilité de la réunion et indépendance des tirages on obtient :
$$P(X = k) = P(B_1) \times \cdots \times P(B_{k-1})P(N_k) + P(N_1) \times \ldots P(N_{k-1})P(B_k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p.$$

2. X n'est pas à support fini, elle admet donc une espérance si et seulement si la série
$$\sum_{k=2}^{+\infty} kP(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k \times (p^{k-1}q + q^{k-1}p)$$
converge absolument. Or cette série est à termes positifs, la convergence absolue est donc équivalente à la convergence et puisqu'on veut aussi la valeur de la somme, on revient à la somme partielle (pour reconnaître une série usuelle ou calculer la somme en télescopant) : ici on va faire apparaître des séries géométriques dérivées :
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k \times (p^{k-1}q + q^{k-1}p) &= q\sum_{k=2}^{n} kp^{k-1} + p\sum_{k=2}^{n} kq^{k-1} \\ &= q\left(\sum_{k=1}^{n} kp^{k-1} - 1\right) + p\left(\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} - 1\right)\end{aligned}$$
On reconnaît deux séries géométriques dérivées de raison p et q, avec $|p| = p < 1$ et $|q| = q < 1$ donc elles convergent absolument : X admet donc une espérance et :
$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k \times (p^{k-1}q + q^{k-1}p) = q\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} - 1\right) + p\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} - 1\right) \\ &= q\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) + p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) = \frac{1}{q} - q + \frac{1}{p} - p = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.\end{aligned}$$

Exercice 5.

Pour obtenir une loi de probabilité, il faut que tous les termes soient positifs et que la somme soit égale à 1.

- Pour tout $k \geq 3$, $\frac{1}{2^{k-2}} \geq 0$ donc tous les termes sont bien positifs.

– On veut vérifier que

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-2}}$$

converge et vaut 1. On revient donc à la somme partielle et on reconnaît ici une série usuelle plutôt qu'un télescopage :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2^{k-2}} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} - 1$$

On reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, avec $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc elle converge (absolument) et :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

donc on a bien défini une loi de probabilité. Calculons l'espérance de X (et vérifions si elle existe) : pour cela il faut prouver la convergence absolue et calculer :

$$\sum_{k=3}^{+\infty} k \times \frac{1}{2^{k-2}}.$$

Cette série est à termes positifs donc sa convergence absolue est équivalent à sa convergence. On revient donc à la somme partielle et on reconnaît ici une série usuelle plutôt qu'un télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} k \times \frac{1}{2^{k-2}} &= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{2^{k-2}} - 1 \times \frac{1}{2^{-1}} - 2 \times \frac{1}{2^0} \\
&= \frac{1}{2^{-1}} \sum_{k=1}^{n} k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 2 - 2 = 2 \sum_{k=1}^{n} k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - 4.
\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{2}$, avec $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc elle converge absolument. X admet donc une espérance et :

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 4 = 2 \times 4 - 4 = 4.$$