TD 2 - Etude locale de fonctions

Exercice 1.
Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point indiqué.

1. $f_1(x) = \frac{12x^2-5x+3}{x^3-2x+1}$ en $+\infty$, en 0, en $-\infty$.
2. $f_2(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$ et $-\infty$.
3. $f_3(x) = e^x - 2\ln(x) + 7x^2$ en $+\infty$, en 0 et en 1.
4. $f_4(x) = \frac{e^x-e^{2x}+x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. $f_5(x) = \ln(1+x^2)$ en $+\infty$.
6. $f_6(x) = \frac{x\ln(1+x)-x^2}{e^x-x-1}$ en 0.
7. $f_7(x) = \frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}$ en 0.
8. $f_8(x) = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{\ln(x)}{2}$ en 1
9. $f_9(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ en $+\infty$.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \text{ pour } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de f'.
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

Exercice 3.

On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{1-e^{-t}} \text{ si } t \in \mathbb{R}_+^* \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que φ est de classe C^1 sur $[0;+\infty[$.
4. Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\psi(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$.
5. Démontrer que φ réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans J ; J étant un ensemble à déterminer.

Exercice 4.

Soit g la fonction définie sur $]-1;1[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de g.
2. En déduire que g est continue et dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 de C_g et étudier la position de C_g par rapport à sa tangente.

Exercice 5.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. (a) Montrer que f est continue à droite en 0.
   (b) Montrer que f est dérivable à droite en 0.
2. (a) A l'aide du développement limité de e^u lorsque u est au voisinage de 0, et d'un changement de variable approprié, montrer que :

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{2x} + o_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

   (b) En déduire qu'au voisinage de $\pm\infty$, la courbe C_f de f admet une asymptote oblique dont on donnera l'équation et déterminer la position relative de C_f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Exercice 6.
Calculer la limite des suites suivantes :

$$u_n = n(\sqrt[n]{2} - 1), \qquad v_n = n\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Démontrer que f est continue en 0.
   b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
2) a) Démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x + 1$.
   b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe et les variations de f.
3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4) a) Démontrer que le développement limité à l'ordre 2 de f en 1 est :

$$f(x) = 1 + 2(x-1) + o\left((x-1)^2\right)$$

   b) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.
   c) On admet que le développement limité à l'ordre 3 de f en 1 est :

$$f(x) = 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)$$

Préciser la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 1.
   d) Construire C_f et T dans un repère orthonormé.