Corrigé du TD : Calcul matriciel

Exercice 1.

1. $$P(A) = (A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   donc le polynôme $P(X) = (X-1)(X-2)$ est bien annulateur de A.

2. On développe l'équation $(A-I)(A-2I) = 0$, on isole I dans l'égalité, puis on factorise par A :
   $$A^2 - 3A + 2I = 0 \iff A^2 - 3A = -2I \iff -\frac{1}{2}(A^2 - 3A) = I \iff A\left(-\frac{1}{2}(A-3I)\right) = I$$
   donc A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A-3I) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

3. Avec la méthode du pivot :
   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
   $$\iff L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
   $$\iff L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$
   $$\iff L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$
   $$\iff L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$
   $$\iff \begin{array}{c} L_1 \leftarrow -1/2L_1 \\ L_2 \leftarrow 1/2L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/2L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{array}\right)$$
   donc A est inversible et :
   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$
   et on retrouve bien le même résultat.

4. On remarque qu'en échangeant les lignes du système, on peut faire apparaître un système qui s'écrit matriciellement avec la matrice A :
   $$\begin{cases} -x + y = 3 \\ y - z = 1 \\ -3x + 4y - 3z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} y - z = 1 \\ -3x + 4y - 3z = -2 \\ -x + y = 3 \end{cases} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer la solution (qui est unique) du système :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

1. On calcule :

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc le polynôme $P(X) = X^2 - X$ est annulateur de A.

• Supposons que A est inversible, on part de l'égalité $P(A) = 0$ et on simplifie en multipliant par A^{-1} :

$$A^2 - A = 0 \quad \text{donc} \quad A^{-1}(A^2 - A) = A^{-1} \times 0 \quad \text{donc} \quad A - I = 0 \quad \text{et enfin} \quad A = I$$

qui est absurde, puisque A, donné par l'énoncé, n'est pas l'identité. On en déduit que A n'est pas inversible.

• Supposons que $A - I$ est inversible, on part de l'égalité $P(A) = 0$ et on simplifie en multipliant par $(A - I)^{-1}$:

$$A^2 - A = 0 \quad \text{donc} \quad A(A - I) = 0 \text{ donc} \quad A(A - I)(A - I)^{-1} = 0(A - I)^{-1} \quad \text{donc} \quad A = 0$$

qui est absurde, puisque A, donné par l'énoncé, n'est pas la matrice nulle. On en déduit que $A - I$ n'est pas inversible.

2. On applique la méthode uniquement sur A (pas de I à côté) puisqu'on ne cherche pas l'inverse (qui ne doit pas exister) :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette réduite triangulaire a un coefficient nul sur sa diagonale, donc A n'est pas inversible.

3. Les colonnes C_1 et C_2 de A vérifient $C_1 = -3C_2$ donc elles sont colinéaires : A n'est pas inversible (on pourrait conclure de même en remarquant que $L_2 = 3L_1$).

Exercice 3.

1. Les colonnes C_1, C_2 et C_3 de A vérifient $C_3 = -C_1$ donc C_1 et C_3 sont colinéaires : A n'est donc pas inversible.

2. Les colonnes C_1, C_2 et C_3 de B vérifient $C_3 = -C_1 - C_2$ donc C_3 s'écrit en fonction des autres colonnes : B n'est donc pas inversible.

3. La matrice C n'est pas carrée, elle n'est donc pas inversible.

Exercice 4.

1. On calcule sans difficulté :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, pour tout $k \geq 3$, $J^k = J^3 J^{k-3} = 0J^{k-3} = 0$.

2. On sait que J et nilpotente, et $T = 2I + J$ (somme de 2 matrices simples) : on doit penser à utiliser le binôme de Newton.

   Les matrices $2I$ et J commutent car $(2I)J = 2J$ et $J(2I) = 2J$ donc la formule du binôme s'applique, on peut donc écrire : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n = (2I - J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-J)^k (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} J^k$$

   Or pour tout $k \geq 3$, $J^k = 0$ donc, pour tout $n \geq 2$ (car sinon, la somme ne va pas jusqu'à 2) :

$$\begin{aligned} T^n &= = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} J^k = \binom{n}{0} 2^n J^0 - \binom{n}{1} 2^{n-1} J + \binom{n}{2} 2^{n-2} J^2 \\ &= 2^n I - n 2^{n-1} J + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} J^2 = 2^n I - n 2^{n-1} J + n(n-1) 2^{n-3} J^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 3n2^{n-1} & 2^n & 0 \\ -3n(n-1)2^{n-2} & -n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   et cette formule reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ car :

$$T^0 = I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 0 \\ 3 \times 0 \times 2^{-1} & 2^0 & 0 \\ -3 \times 0 \times (-1) \times 2^{-2} & -0 \times 2^{-1} & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

   d'une part, et d'autre part :

$$T^1 = T = 2I - J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 0 \\ 3 \times 1 \times 2^0 & 2^1 & 0 \\ -3 \times 1 \times 0 \times 2^{-1} & -1 \times 2^0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. On remarque qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, les relations de récurrences sur les suites (a_n), (b_n) et (c_n) s'écrivent :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} X_n = TX_n$$

   Montrons alors par récurrence sur n que pour tout $n \geq 0$, $X_n = T^n X_0$:

   — **Initialisation** : pour $n = 0$, $T^0 X_0 = IX_0 = X_0$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

   — **Hérédité** : supposons qu'il existe $n \geq 0$ fixé tel que $X_n = T^n X_0$, alors :

$$X_{n+1} = TX_n = TT^n X_0 = T^{n+1} X_0$$

   et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

   — **Conclusion** : pour tout $n \geq 0$, $X_n = T^n X_0$.

   en réécrivant les définitions de X_n et X_0 et la valeur de T^n on obtient :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 3n2^{n-1} & 2^n & 0 \\ -3n(n-1)2^{n-2} & -n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n a_0 \\ 3n2^{n-1} a_0 + 2^n b_0 \\ -3n(n-1)2^{n-2} a_0 - n2^{n-1} b_0 2^n c_0 \end{pmatrix}$$

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n = 2^n a_0 \\ b_n = 3n2^{n-1} a_0 + 2^n b_0 \\ c_n = -3n(n-1)2^{n-2} a_0 - n2^{n-1} b_0 2^n c_0 \end{cases}$$

Exercice 5.

1. (a) On remarque à vue où en résolvant le système à 9 équations $A^2 = aA + bI$ que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 7 \\ 7 & 7 & 11 \end{pmatrix} = 7A - 10I.$$

On en déduit que

$$A^2 - 7A + 10I = 0$$

donc le polynôme $P(x) = x^2 - 7x + 10$ est annulateur de A.

(b) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux nombres a_n et b_n tels que $A^n = a_n I + b_n A$:

— **Initialisation** : pour $n = 0$, on sait que $A^0 = I = 1I + 0A$, donc la propriété est vraie au rang 0, avec :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad b_0 = 0.$$

— **Hérédité** : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel qu'il existe deux nombres a_n et b_n vérifiant $A^n = a_n I + b_n A$. Alors :

$$A^{n+1} = A^n A = (a_n I + b_n A)A = a_n A + b_n A^2 = a_n A + b_n(7A - 10I) = -10b_n I + (a_n + 7b_n)A$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$, avec :

$$a_{n+1} = -10b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n + 7b_n.$$

— **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux nombres a_n et b_n tels que :

$$A^n = a_n I + b_n A$$

qui définissent bien les suites (a_n) et (b_n) cherchées. De plus on a vu que ;

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = -10b_n \\ b_{n+1} = a_n + 7b_n \end{cases}$$

(c) Pour expliciter des suites imbriquées, on commence par "désimbriquer" les relations de récurrence, en obtenant une relation de récurrence double sur l'une des suites. Essayons avec a_n :

$$a_{n+2} = -10b_{n+1} = -10(a_n + 7b_n) = -10a_n + 7 \times (-10b_n) = 7a_{n+1} - 10a_n$$

On résout l'équation caractéristique : $r^2 - 7r + 10 = 0$ a pour discriminant puis racines :

$$\Delta = 49 - 40 = 9 \quad , \quad r_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \quad , \quad r_2 = \frac{7+3}{2} = 5$$

donc on sait qu'il existe deux constantes λ et μ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda 2^n + \mu 5^n$.

On détermine λ et μ à l'aide d'un système écrit avec deux valeurs connues de la suite (a_n) : ici on connaît seulement $a_0 = 1$, mais la relation de récurrence imbriquée obtenue à la question précédente permet de calculer :

$$a_1 = -10b_1 = 0.$$

On en déduit que λ et μ sont solutions du système :

$$\begin{cases} a_0 = \lambda + \mu = 1 \\ a_1 = 2\lambda + 5\mu = 0 \end{cases} \iff L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 3\mu = -2 \end{cases}$$

$$\iff \quad \begin{cases} \lambda = 5/3 \\ \mu = -2/3 \end{cases}$$

et finalement on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{5 \times 2^n - 2 \times 5^n}{3}.$$

enfin on obtient b_n, soit de la même manière, soit en utilisant astucieusement les relations de récurrences imbriquées : on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = -10b_n \iff b_n = -\frac{1}{10}a_{n+1} = -\frac{5 \times 2^{n+1} - 2 \times 5^{n+1}}{30} = -\frac{10 \times 2^n - 10 \times 5^n}{30} = \frac{5^n - 2^n}{3}.$$

Enfin on peut en conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = a_n = \frac{5 \times 2^n - 2 \times 5^n}{3} I + \frac{5^n - 2^n}{3} A.$$

2. (a) On commence par calculer B :

$$B = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice ne se prête pas au binôme de Newton (pas d'écriture avec une matrice nilpotente ou dont on a déjà calculé les puissances, puisqu'on suppose ici que A^n n'est pas encore connue), n'est pas diagonale, on va donc calculer ses premières puissances pour essayer de conjecturer une expression simple à prouver par récurrence :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3B \ , \ B^3 = B^2B = 3BB = 3B^2 = 9B \ , \ B^4 = B^2B^2 = (3B)(3B) = 9B^3 = 27B$$

et on peut conjecturer la formule suivante : pour tout $n \geq 1$ (la formule n'est pas valable pour $n = 0$), $B^n = 3^{n-1}B$, qu'on prouve par récurrence :

— **Initialisation** : pour $n = 1$, $3^{1-1}B = IB = B$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

— **Hérédité** : supposons qu'il existe $n \geq 1$ fixé tel que $B^n = 3^{n-1}B$, alors :

$$B^{n+1} = B^nB = 3^{n-1}BB = 3^{n-1}B^2 = 3^{n-1}(3B) = 3^nB$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— **Conclusion** : pour tout $n \geq 1$, $B^n = 3^{n-1}B$.

(b) Puisque $B = A - 2I$, on obtient que $A = B + 2I$: comme on connaît les puissances de B et I, on pense à la formule du binôme.

Tout d'abord on vérifie que B et $2I$ commutent :

$$B(2I) = 2B \quad \text{et} \quad (2I)B = 2B \quad \text{donc} \quad B(2I) = (2I)B$$

et la formule du binôme est valable. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k.$$

L'expression de B^k n'est pas la même pour $k = 0$ et ensuite, on sépare :

$$\begin{aligned}
A^n &= \binom{n}{0} 2^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} B \\
&= 2^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k \right) B \\
&= 2^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k - \binom{n}{0} 2^n 3^0 \right) B \\
&= 2^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k - 2^n \right) B \\
&= 2^n I + \frac{1}{3} \left((2+3)^n - 2^n \right) B = 2^n I + \frac{1}{3} (5^n - 2^n)(A - 2I) \\
&= \left(2^n - \frac{2}{3}(5^n - 2^n) \right) I + \frac{5^n - 2^n}{3} A = \frac{5 \times 2^n - 2 \times 5^n}{3} I + \frac{5^n - 2^n}{3} A
\end{aligned}$$

(on remarque qu'on a bien retrouvé la même expression que dans la question 1).

II. Réduction de matrices

Exercice 6.
• $X_1 \neq 0$ et $AX_1 = X_1 = 1.X_1$ donc X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
• $X_2 \neq 0$ et $AX_2 = 0 = 0.X_2$ donc X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

Exercice 7.

1. On cherche, en trouvant une réduite triangulaire avec des pivots valides, les valeurs de λ qui rendent $A - \lambda I$ non inversible :

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 & -4 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + (3-\lambda)L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 0 & 8 & -8+(3-\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 8 & -8+(3-\lambda)(1-\lambda) \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 8L_3 + (1+\lambda)L_2}{\iff} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 8 & -8+(3-\lambda)(1-\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

avec

$$P(\lambda) = 8(1+\lambda)+(1+\lambda)\left[-8+(3-\lambda)(1-\lambda)\right] = (1+\lambda)\left[8-8+(3-\lambda)(1-\lambda)\right] = (1+\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda).$$

Cette réduite est triangulaire, donc $A-\lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des coefficients diagonaux est nul, donc si et seulement si

$$(1+\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{-1; 3; 1\}$$

et les valeurs propres de A sont donc -1, 1 et 3.

$$\boxed{sp(A) = \{-1; 1; 3\}}$$

2. On cherche, en trouvant une réduite triangulaire avec des pivots valides, les valeurs de λ qui rendent $B - \lambda I$ non inversible :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \lambda L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Cette réduite est triangulaire, donc $B-\lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des coefficients diagonaux est nul, donc si et seulement si

$$1-\lambda=0 \Longleftrightarrow \lambda=1 \quad \text{ou} \quad 3-2\lambda-\lambda^2=0$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant pour racines :

$$\Delta=4+12=16 \quad , \quad \lambda_1=\frac{2-4}{-2}=1 \quad , \quad \lambda_2=\frac{2+4}{-2}=-3.$$

En réunissant toutes les solutions, les valeurs propres de B sont donc -3 et 1.

$$\boxed{sp(B)=\{-3;1\}}$$

3. On cherche, en trouvant une réduite triangulaire avec des pivots valides, les valeurs de λ qui rendent $C-\lambda I$ non inversible :

$$\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & -1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 2 & -3 & 3-\lambda\end{pmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}2 & -3 & 3-\lambda\\ 1 & -\lambda & 1\\ -\lambda & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-L_1\\ L_3\leftarrow 2L_3+\lambda L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}2 & -3 & 3-\lambda\\ 0 & 3-2\lambda & \lambda-1\\ 0 & 4-3\lambda & -2+\lambda(3-\lambda)\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow 2L_3-3L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}2 & -3 & 3-\lambda\\ 0 & 3-2\lambda & \lambda-1\\ 0 & -1 & -4+2\lambda(3-\lambda)-3(\lambda-1)\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}2 & -3 & 3-\lambda\\ 0 & -1 & -4+2\lambda(3-\lambda)-3(\lambda-1)\\ 0 & 3-2\lambda & \lambda-1\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+(3-2\lambda)L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}2 & -3 & 3-\lambda\\ 0 & -1 & -4+2\lambda(3-\lambda)-3(\lambda-1)\\ 0 & 0 & P(\lambda)\end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \lambda-1+(3-2\lambda)\left[-4+2\lambda(3-\lambda)-3(\lambda-1)\right]=\lambda-1+(3-2\lambda)(-4+6\lambda-2\lambda^2-3\lambda+3)\\
&= \lambda-1+(3-2\lambda)(-2\lambda^2+3\lambda-1)=\lambda-1-6\lambda^2+9\lambda-3+4\lambda^3-6\lambda^2+2\lambda\\
&= 4\lambda^3-12\lambda^2+12\lambda-4=4(\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1).
\end{aligned}$$

Pour factoriser ce polynôme de degré 3, on en cherche une racine évidente :

$$P(0)=-4 \quad , \quad P(1)=0$$

donc 1 est une racine évidente, on peut factoriser par $\lambda-1$:

$$P(\lambda)=4(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1)=4(\lambda-1)(\lambda-1)^2=4(\lambda-1)^3.$$

Cette réduite est triangulaire, donc $C-\lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des coefficients diagonaux est nul, donc si et seulement si

$$4(\lambda-1)^3=0 \Longleftrightarrow \lambda=1.$$

et la seule valeur propre de C est 1.

$$\boxed{sp(C)=\{1\}}$$

Exercice 8.

1. (a) **exo 1 :** $P(X) = (X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de A donc les seules valeurs propres possible de A sont les racines de P soit 1 et 2. On obtient :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1;2\}$$

Vérifions alors si 1 et 2 sont bien valeurs propres de A :

— $A - 1I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $A - 1I$ a deux colonnes égales donc n'est pas inversible.
1 est donc bien valeur propre de A.

— $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ vérifie $L_1 + L_3 = L_2$. Ses lignes sont liées donc $A - 2I$ n'est pas inversible.
2 est donc bien valeur propre de A.
Au final on a :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1;2\}$$

(b) **exo 2 :** $P(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de A donc les seules valeurs propres possibles de A sont 0 et 1.
De plus, dans l'exercice, on a prouvé que $A - 0I = A$ et $A - 1I = A - I$ ne sont pas inversibles donc 0 et 1 sont bien valeurs propres de P.
Ainsi, :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{0;1\}$$

2. $(C-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
puis : $(C-I)^3 = (C-I)^2(C-I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a donc $(C-I)^3 = 0$ donc le polynôme $P(X) = (X-1)^3$ est polynôme annulateur de C.
Ainsi, l'unique valeur propre possible de C est 1 (seule racine de P).
De plus, $C - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ vérifie $L_2 - L_1 = L_3$ donc $C - I$ non inversible. (ou exemple d'autre démo : par l'absurde : On suppose $C - I$ inversible, alors en multipliant à gauche les deux membres de l'égalité $(C-I)^3 = 0$ par $(C-I)^{-1}$, on obtient $(C-I)^2 = 0$ ce qui est en contradiction avec les calculs précédents : conclusion $C - I$ n'est pas inversible).
Conclusion : 1 est bien la seule valeur propre de C.

Exercice 9.

1. On cherche, en trouvant une réduite triangulaire avec des pivots valides, les valeurs de λ qui rendent $A - \lambda I$ non inversible :

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -5-\lambda \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ 4-\lambda & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + (4-\lambda)L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -5-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 5+\lambda \\ 0 & 6\lambda - 6 & -(4-\lambda)(5+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2}{\iff} \begin{pmatrix} -3 & -6 & -5-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 5+\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

avec

$$P(\lambda) = -(4-\lambda)(5+\lambda) + 6(5+\lambda) = (5+\lambda)\left[6 - (4-\lambda)\right] = (5+\lambda)(2+\lambda)$$

Cette réduite est triangulaire, donc $A-\lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des coefficients diagonaux est nul, donc si et seulement si

$$1-\lambda=0 \Longleftrightarrow \lambda=1 \quad \text{ou} \quad (5+\lambda)(2+\lambda)=0 \Longleftrightarrow \lambda\in\{-5;-2\}$$

et les valeurs propres de A sont donc -5, -2 et 1.

$$\boxed{sp(A)=\{-5;-2;1\}}$$

2. — Pour $\lambda=-5$, on résout :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-5}(A) \iff (A+5I)X=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r}-3x-6y=0\\6y=0\\0=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r}x=0\\y=0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow X=\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$E_{-5}(A)=\left\{z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \text{tq } z\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\text{Vect}(X_1).$$

— Pour $\lambda=-2$, on résout :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-2}(A) \iff (A+2I)X=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r}-3x-6y-3z=0\\3y+3z=0\\0=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r}x=z\\y=-z\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow X=\begin{pmatrix}z\\-z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$E_{-2}(A)=\left\{z\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \text{tq } z\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right]=\text{Vect}(X_2).$$

— Pour $\lambda=1$, on résout :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{1}(A) \iff (A-I)X=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r}-3x-6y-6z=0\\6z=0\\18z=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r}x=-2y\\z=0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow X=\begin{pmatrix}-2y\\y\\0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$E_{1}(A)=\left\{y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \text{tq } y\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right]=\text{Vect}(X_3).$$

3. La famille (X_1,X_2,X_3) a un cardinal égal à 3, qui est aussi la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: il suffit alors de prouver sa liberté pour obtenir que c'en est une base. On résout :

$$aX_1+bX_2+cX_3=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{r}b-2c=0\\-b\ \ +c=0\\a+b\ \ \ \ \ =0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow L_1\leftrightarrow L_3 \quad \left\{\begin{array}{r}a+b\ \ \ \ \ =0\\-b\ \ +c=0\\b-2c=0\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow L_3\leftarrow L_3+L_2 \quad \left\{\begin{array}{r}a+b\ \ \ \ \ =0\\-b+c=0\\-c=0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r}a=0\\b=0\\c=0\end{array}\right.$$

donc la famille (X_1, X_2, X_3) est libre et $\text{Card}(X_1, X_2, X_3) = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, donc la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. La famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A, donc A est diagonalisable et en posant :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

P est constituée d'une base de vecteurs propres de A, respectivement associés aux valeurs propres -5, -2 et 1 qui constituent la diagonale de D, donc :

$$A = PDP^{-1}.$$

5. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$:

— **Initialisation** : pour $n = 0$, on calcule :

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

— **Hérédité** : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $A^n = PD^nP^{-1}$, alors :

$$A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

6. On connaît D et D^n car D est diagonale, calculons P^{-1} à l'aide de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

donc en en déduit que P est inversible (on le savait déjà) et :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin on peut calculer :

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-5)^n & 2(-5)^n & (-5)^n \\ -(-2)^n & -2(-2)^n & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(-2)^n + 2 & -2(-2)^n + 2 & 0 \\ (-2)^n - 1 & 2(-2)^n - 1 & 0 \\ (-5)^n - (-2)^n & 2(-5)^n - 2(-2)^n & (-5)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-2)^n + 2 & (-2)^{n+1} + 2 & 0 \\ (-2)^n - 1 & 2(-2)^n - 1 & 0 \\ (-5)^n - (-2)^n & 2(-5)^n + (-2)^{n+1} & (-5)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 10.

1. On cherche, en trouvant une réduite triangulaire avec des pivots valides, les valeurs de λ qui rendent $B - \lambda I$ non inversible :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 7-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 4-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} &\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -1 \\ 7-\lambda & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + (7-\lambda)L_1}}{\iff} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & \lambda-3 & -4+(7-\lambda)(4-\lambda) \end{pmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= -4 + (7-\lambda)(4-\lambda) + 3 - \lambda = (7-\lambda)(4-\lambda) - 1 - \lambda \\
&= 28 - 7\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 1 - \lambda = \lambda^2 - 12\lambda + 27.
\end{aligned}$$

Cette réduite est triangulaire, donc $B - \lambda I$ n'est pas inversible si et seulement si l'un des coefficients diagonaux est nul, donc si et seulement si

$$3 - \lambda = 0 \iff \lambda = 3 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0$$

Le discriminant puis les racines de ce trinôme valent :

$$\Delta = 144 - 4 \times 27 = 144 - 108 = 36 \quad , \quad \lambda_1 = \frac{12-6}{2} = 3 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{12+6}{2} = 9$$

et les valeurs propres de B sont donc 3 et 9.

$$\boxed{sp(B) = \{3; 9\}}$$

2. — Pour $\lambda = 3$, on résout :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(B) \iff (B - 3I)X = 0 \iff \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff z = 2x + y$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$E_3(B) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ tq } x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect}(X_1, X_2).$$

— Pour $\lambda = 9$, on résout :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_9(B) \iff (B - 9I)X = 0 \iff \begin{cases} -2x - y - 5z = 0 \\ -6y - 6z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$E_9(B) = \left\{ z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ tq } z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Vect}(X_3).$$

3. La famille (X_1, X_2, X_3) a un cardinal égal à 3, qui est aussi la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: il suffit alors de prouver sa liberté pour obtenir que c'en est une base. On résout :

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \iff \begin{cases} a \quad - 2c = 0 \\ b - c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} a \quad - 2c = 0 \\ b - c = 0 \\ b + 5c = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} a \quad - 2c = 0 \\ b - c = 0 \\ 6c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc la famille (X_1, X_2, X_3) est libre et $\text{Card}(X_1, X_2, X_3) = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, donc la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. La famille (X_1, X_2, X_3) est une base donc la famille (X_2, X_1, X_3) est également une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B, donc B est diagonalisable. De plus en posant

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

P est constituée d'une base de vecteurs propres de B respectivement associés aux valeurs propres 3, 3 et 9 qui constituent la diagonale de D, donc :

$$B = PDP^{-1}.$$

5. (a) L'ensemble C_B est défini de manière implicite, on utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels :

— $C_B \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.

— La matrice nulle vérifie $B \times 0 = 0$ et $0 \times B = 0$ donc elle appartient bien à C_B.

— Soient M_1 et M_2 deux éléments de C_B, donc vérifiant $BM_1 = M_1B$ et $BM_2 = M_2B$, montrons que $M_1 + M_2 \in C_B$:

$$B(M_1 + M_2) = BM_1 + BM_2 = M_1B + M_2B = (M_1 + M_2)B$$

donc $M_1 + M_2 \in C_B$, qui est donc stable par somme.

— Soient M un élément de C_B, donc vérifiant $BM = MB$, et λ un réel, montrons que $\lambda M \in C_B$:

$$B(\lambda M) = \lambda BM = \lambda MB = (\lambda M)B$$

donc $\lambda M \in C_B$, qui est donc stable par produit par un réel.

Les quatre propriétés nécessaires sont vérifiées, donc C_B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et donc un espace vectoriel.

(b) i. On renverse la relation donnée :

$$N = P^{-1}MP \iff P(N)P^{-1} = P(P^{-1}MP)P^{-1} \iff M = PNP^{-1}.$$

ii. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} M \in C_B \quad &\iff \quad BM = MB \iff PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \iff PDNP^{-1} = PNDP^{-1} \\ &\iff \quad P^{-1}(PDNP^{-1})P = P^{-1}(PNDP^{-1})P \iff DN = ND. \end{aligned}$$

iii. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & f \\ c & d & g \\ h & i & e \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on résout :

$$\begin{aligned} DN = ND \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3f \\ 3c & 3d & 3g \\ 9h & 9i & 9e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 9f \\ 3c & 3d & 9g \\ 3h & 3i & 9e \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{lll} 3a = 3a & 3b = 3b & 3f = 9f \\ 3c = 3c & 3d = 3d & 3g = 9g \\ 9h = 3h & 9i = 3i & 9e = 9e \end{array} \right. \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{lll} 0 = 0 & 0 = 0 & f = 0 \\ 0 = 0 & 0 = 0 & g = 0 \\ h = 0 & i = 0 & 0 = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \quad N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

iv. On en déduit que :

$$M \in C_B \iff M = P \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} P^{-1}$$

Il reste à calculer P^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\iff L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\iff L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 6L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 12 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\iff L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\iff \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 1/6L_1 \\ L_2 \leftarrow -1/6L_2 \\ L_3 \leftarrow -1/6L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/6 & 1/6 \end{array}\right)$$

donc P est bien inversible (on le savait déjà) et :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 5/6 & 1/6 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin on obtient :

$$\begin{aligned} M \in C_B \iff & M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} c & d & -2e \\ a & b & -e \\ a+2c & b+2d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \iff & M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2c+2d+4e & 5c-2d+2e & c+2d-2e \\ -2b+2b+2e & 5a-2b+e & a+2b-e \\ -2a-4c+2b+4d-2e & 5a+10c-2b-4d-e & a+2c+2b+4d+e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 11.

1. Deux méthodes : soit on cherche les réels λ tels que $A - \lambda I$ non inversible (par pivots), soit on remarque que $A^2 = I$ donc $P(X) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A donc les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et -1.
   Pour vérifier si ce sont bien des valeurs propres, on va calculer les sous-espace propres associés : une valeur est bien valeur propre de A si et suelement si le sous-espace propre associé contient au moins un vecteur non nul.
   • **Calculons** $E_1(A)$ **:** On résout l'équation $(A - 1I)X = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On trouve $(A - I)X = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. • **Calculons** $E_{-1}(A)$ **:** On résout l'équation $(A - (-1)I)X = 0 \Leftrightarrow (A + I)X = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On trouve $(A + I)X = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $E_{-1}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.
   On obtient que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (car 2 vecteurs libres car non colinéaires dans un espace vectoriel de dimension 2) donc A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. On remarque que X est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement $X^2 - 3X + I = PDP^{-1}$.
   On multiplie donc par P^{-1} à gauche et par P à droite, on obtient : X est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement $P^{-1}(X^2 - 3X + I)P = D$ si et seulement si $P^{-1}X^2P - 3P^{-1}XP + I = D$.
   En posant le changement de variable $Y = P^{-1}XP$, on remarque que $Y^2 = P^{-1}XP \times P^{-1}XP = P^{-1}X^2P$ donc :
   X est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si Y est solution de l'équation : $Y^2 - 3Y + I = D$
3. Soit Y une solution de E, alors $YD = Y(Y^2 - 3Y + I) = Y^3 - 3Y^2 + Y = (Y^2 - 3Y + I)Y = DY$.
   Résolvons donc d'abord l'équation (plus simple que $(\mathcal{E}')$) $YD = DY$ d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:
   $YD = DY$ si et seulement si $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ si et seulement si $a = a$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = d$
   Les solutions de l'équation $YD = DY$ sont donc les matrices Y de la forme $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.
4. On a montré que si Y est solution de $(\mathcal{E}')$) alors Y est diagonale. Il ne reste plus qu'à vérifier, parmi les matrices diagonales, lesquelles sont réellement solutions de $(\mathcal{E}')$) :
   On résout l'équation $Y^2 - 3Y + I = D$ d'inconnue $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Cette équation est équivalente à $\begin{pmatrix} a^2 - 3a + 1 & 0 \\ 0 & d^2 - 3d + 1 \end{pmatrix} = D \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3a = 0 \\ d^2 - 3d + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = 3 \\ d = 1 \text{ ou } d = 2 \end{cases}$.
   Les solutions de $(\mathcal{E}')$) sont $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les solutions X de l'équation $(\mathcal{E})$ sont donc $X = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$, $X = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$, $X = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $X = P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$.