TD 3 - Séries numériques

Exercice 1. Calculer les sommes suivantes après avoir vérifié la convergence des séries :

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-2n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{3^{\frac{n}{2}}}, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{4k^2-3k-1}{4^{k-2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+1}{n!},$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k}\right), \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}, \quad \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}7^n}{n!}$$

Exercice 2. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{k\geq 2} \frac{1}{3^k+1}, \quad \sum_{k\geq 3} \frac{1}{\sqrt{k}-1}, \quad \sum_{n\geq 3} \frac{e^{-2n}+n}{n^{\frac{3}{2}}+(-1)^n}, \quad \sum_{n\geq 6} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n+4}}, \quad \sum_{n\geq 1} e^{-n^2},$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n n^4 \ln(n)}{e^{2n}}, \quad \sum_{n\geq 4} \frac{1}{n\sqrt{n}\ln(n)}$$

Exercice 3. Soit $u_0 \in]0;1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$, étudier les variations de $(u_n)_{n\geq 0}$ et montrer que la suite de terme général u_n converge vers 0.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.

Exercice 4. Exemple de série semi-convergente : série convergente mais qui ne converge pas absolument.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites (v_p) et (w_p) définies par $v_p = S_{2p}$ et $w_p = S_{2p+1}$ sont adjacentes.
   En déduire que (S_n) est convergente.
2. La suite (S_n) est-elle absolument convergente ?

Exercice 5. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Etudier le sens de variations et la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.
3. On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$.
4. En déduire que la série de terme général u_n diverge.

Exercice 6. On considère la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Justifier que cette série converge.
2. Déterminer des réels a, b et c tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.
3. Déterminer alors $S_p = \sum\limits_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ pour tout $p \geq 1$ (on fera apparaitre deux séries télescopiques).
4. En déduire la limite de la série.