Correction du TD 2 : Etude locale de fonctions

Exercice 1.

1. f_1 est factorisée au maximum. A chaque fois on vérifie si les facteurs (ici il y en a 2) tendent vers une limite finie non nulle. Pour chaque facteur pour lequel ce n'est pas le cas, on factorise les sommes par leur terme prépondérant.

   (a) En $+\infty$, les deux facteurs tendent vers $+\infty$, on écrit :

   $$f_1(x) = \frac{12x^2\left(1-\frac{5}{12x}+\frac{3}{12x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}$$

   Or

   $$\left(1-\frac{5}{12x}+\frac{3}{12x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

   donc on obtient :

   $$f_1(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{12x^2}{x^3} = \frac{12}{x}.$$

   (b) En 0, $12x^2-5x+3$ tend vers 3 et le dénominateur tend vers 1. On peut donc écrire :

   $$12x^2-5x+3 \xrightarrow[x\to0]{} 3 \quad \text{et} \quad x^3-2x+1 \xrightarrow[x\to0]{} 1$$

   donc

   $$f_1(x) \underset{0}{\sim} \frac{3}{1} = 3.$$

   (c) En $-\infty$, tous les facteurs tendent vers $\pm\infty$, on écrit :

   $$f_1(x) = \frac{12x^2\left(1-\frac{5}{12x}+\frac{3}{12x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}$$

   Or

   $$\left(1-\frac{5}{12x}+\frac{3}{12x^2}\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$$

   donc on obtient :

   $$f_1(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{12x^2}{x^3} = \frac{12}{x}.$$

2. f_2 est factorisée au maximum et chaque facteur comporte des sommes, on va donc factoriser par les termes prépondérants :

   (a) En $+\infty$,

   $$f_2(x) = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

   Or

   $$1-e^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad 1+e^{-2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

   donc

   $$f_2(x) \underset{+\infty}{\sim} 1.$$

(b) En $-\infty$,

$$f_2(x) = \frac{-e^{-x}(-e^{2x}+1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Or

$$e^{-2x}-1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1 \quad \text{et} \quad e^{2x}+1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1$$

donc

$$f_2(x) \underset{-\infty}{\sim} -1.$$

3. f_3 est factorisée au maximum, et il y a un seul facteur, sous forme de somme. On va donc, en chaque point, vérifier la limite et si nécessaire le factoriser par le terme prépondérant :

(a) En $+\infty$, la limite est indéterminée, il faut de toute manière factoriser par le facteur prépondérant :

$$f_3(x) = e^x\left(1 - 2\frac{\ln x}{e^x} + 7\frac{x^2}{e^x}\right)$$

Or d'après les croissances comparées

$$\left(1 - 2\frac{\ln x}{e^x} + 7\frac{x^2}{e^x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

donc

$$f_3(x) \underset{+\infty}{\sim} e^x \times 1 = e^x.$$

(b) En 0, la somme tend vers $+\infty$, et comme les deux autres termes tendent vers des limites finies, le terme prépondérant est $-2\ln x$: on écrit :

$$f_3(x) = -2\ln x\left(-\frac{e^x}{2\ln x} + 1 - \frac{7x^2}{2\ln x}\right).$$

Or par quotients et sommes de limites (aucune croissance comparées ici ! ! !)

$$\left(-\frac{e^x}{2\ln x} + 1 - \frac{7x^2}{2\ln x}\right) \xrightarrow[x\to0]{} 1$$

donc

$$f_3(x) \underset{0}{\sim} -2\ln x \times 1 = -2\ln x.$$

(c) En 1, la somme tend vers $e+7$, on peut donc écrire :

$$e^x - 2\ln x + 7x^2 \xrightarrow[x\to1]{} e+7 \quad \text{donc} \quad f_3(x) \underset{1}{\sim} e+7.$$

4. f_4 est factorisée au maximum (2 facteurs : le numérateur et le dénominateur, chacun comportant une somme, mais l'un à l'intérieur d'une fonction).

(a) En $+\infty$, on écrit :

$$f_4(x) = \frac{-e^{2x}\left(-e^{-x}+1-\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{-e^{2x}\left(-e^{-x}+1-\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-e^{2x}\left(-e^{-x}+1-\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Or au voisinage de $+\infty$, x est positif donc $|x| = x$, et de plus (par croissances comparées pour le premier et par composée de limites pour le second)

$$\left(-e^{-x}+1-\frac{x^2}{e^{2x}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sqrt{1} = 1$$

donc

$$f_4(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-e^{2x}\times 1}{x\times 1} = -\frac{e^{2x}}{x}.$$

(b) En $-\infty$, on écrit :

$$f_4(x) = \frac{x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{2x}}{x^2} + 1\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{2x}}{x^2} + 1\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{2x}}{x^2} + 1\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Or au voisinage de $-\infty$, x est négatif donc $|x| = -x$, et de plus (aucune croissance comparée cette fois, seulement des quotients et des composées de limites) :

$$\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{2x}}{x^2} + 1\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \sqrt{1} = 1$$

donc

$$f_4(x) \underset{-\infty}{\sim} \frac{x^2 \times 1}{(-x)\times 1} = \frac{x^2}{-x} = -x.$$

5. f_5 est factorisée au maximum, et admet un seul facteur qui tend vers $+\infty$, et qui a une somme à l'intérieur d'une fonction. On écrit :

$$f_5(x) = \ln\left[x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right] = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Remarquons qu'on a toujours une écriture avec une somme qui tend vers $+\infty$, mais cette fois-ci elle n'est plus dans le ln : comme un terme tend vers $+\infty$ et l'autre vers 0, le terme prépondérant est évident :

$$f_4(x) = 2\ln x\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln x}\right).$$

Or par quotient, somme et composée de limites,

$$\left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

donc

$$f_5(x) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln x \times 1 = 2\ln x.$$

6. f_6 est factorisée au maximum, et chaque facteur s'écrit comme une somme. Cependant dans les deux cas il n'y a pas de terme prépondérant clair : par contre on remarque des formes de DL (x tend bien vers 0) qui vont permettre d'en faire apparaître :

$$x\ln(1+x) - x^2 = x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - x^2 = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x^2 = -\frac{x^3}{2}(1+o(1)) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$$

d'une part, et d'autre part :

$$e^x - x - 1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - 1 = x^2(1+o(1)) \underset{0}{\sim} x^2$$

donc par quotient (qui est bien une opération compatible avec les équivalents) :

$$f_6(x) \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{2}}{x^2} = -\frac{x}{2}.$$

7. f_7 n'est pas factorisée au maximum, on commence par la factoriser :

$$f_7(x) = \frac{x-(e^x-1)}{x^2(e^x-1)} = \frac{x-e^x+1}{x^2(e^x-1)}$$

On obtient 3 facteurs dont un déjà simplifié (x^2), et deux sous formes des sommes : celles-ci n'ont pas de terme prépondérant clair mais comporte des formes de DL (x tend bien vers 0) qui vont permettre de faire apparaître des termes prépondérants dans chacune :

$$x - e^x + 1 = x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{2}(1+o(1)) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

d'une part, et d'autre part :

$$e^x - 1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right).$$

Or

$$\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \text{donc} \quad e^x - 1 = x\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) \underset{0}{\sim} x.$$

Par produit et quotient (compatible avec les équivalents) :

$$f_7(x) = \frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - e^x + 1}{x^2(e^x - 1)} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2 \times x} = -\frac{1}{2x}.$$

8. f_8 est sous forme factorisée (avec 4 facteurs) et :

$$x + 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 2 \quad , \quad x - 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0 \quad , \quad \ln x \xrightarrow[x\to 1]{} 0 \quad , \quad 2 \xrightarrow[x\to 1]{} 2$$

donc on étudie plus précisément les facteurs $x - 1$ et $\ln x$, car les autres sont équivalents à leur limite : comme on se place en 1, il faut réaliser un changement de variable $y = x - 1 \iff x = y + 1$:

— Le facteur $x - 1$ donne : $x - 1 = y$, ne peut peut pas être simplifié.

— Le facteur $\ln x$ donne (on remarque que y tend vers 0 donc le DL est valable) :

$$\ln(x) = \ln(y + 1) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) = y\left(1 - \frac{y}{2} + o(y)\right)$$

avec

$$\left(1 - \frac{y}{2} + o(y)\right) \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \quad \text{donc } \ln(y + 1) \underset{y\to 0}{\sim} y$$

et enfin en repassant à la variable x :

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$$

Enfin par quotient et produit, compatibles avec les équivalents :

$$f_8(x) \underset{1}{\sim} \frac{2 \times (x - 1)}{(x - 1) \times 2} = 1.$$

9. f_9 est sous forme factorisée, et comporte deux facteurs : le premier, x, est sous forme simplifiée, on s'occupe du second.

$e^{\frac{1}{x}} - 1$ est une somme qui tend vers $e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$: il faut donc factoriser par un terme prépondérant, et il n'y en a pas car les deux termes tendent vers 1.

On doit donc retirer l'exponentielle avec un DL : comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on reconnaît bien la forme e^u au voisinage de 0 :

$$e^{\frac{1}{x}} - 1 = 1 + \left[\frac{1}{x}\right] + \frac{\left[\frac{1}{x}\right]^2}{2} + o\left(\left[\frac{1}{x}\right]^2\right) - 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Or

$$1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad \text{donc} \quad e^{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Enfin par produit, compatible avec les équivalents,

$$f_9(x) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1.$$

Exercice 2.

1. • sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$: $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles continues, avec $1+x^2 \geq 1 > 0$ pour ln et le dénominateur qui ne s'annule pas (x^2 ne s'annule qu'en 0).

   • En 0 : la fonction a une valeur particulière donc on revient à la définition : on cherche la limite de f en 0.

   f est sous forme factorisée, avec deux facteurs : chacun des deux tend vers 0, c'est une forme indéterminée. On cherche un équivalent simple du numérateur pour lever l'indétermination.

   Pour cela on remarque qu'il y a une somme à l'intérieur du ln : mais comme le terme prépondérant est 1, la factorisation par 1 ne change rien. On remarque alors que puisque $x^2 \to 0$, on a une forme de DL :

$$\ln(1+x^2) = (x^2) - \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right).$$

   Or

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \text{donc} \quad x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{0}{\sim} x^2$$

   et enfin :

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1 = f(0)$$

   donc f est bien continue en 0.

   • **Conclusion :** En regroupant, on en déduit que f est continue sur $]-\infty;0[\cup\{0\}\cup]0;+\infty[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$.

2. • sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$: $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables, avec $1+x^2 \geq 1 > 0$ pour ln et le dénominateur qui ne s'annule pas (x^2 ne s'annule qu'en 0).
   De plus, pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $f(x) = \frac{2(x^2-\ln(1+x^2)(1+x^2))}{x^3(1+x^2)}$.

   • En 0 : De même comme 0 est un point particulier, on revient à la définition :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} - 1}{x} = \frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^2} \times \frac{1}{x} = \frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^3}.$$

   On a une forme indéterminée, on cherche un équivalent simple du numérateur pour la lever : cette somme n'a pas de terme prépondérant apparent (les deux termes tendent vers 0 et aucune information ne permet de savoir si l'un est plus rapide que l'autre), on utilise le DL :

$$\ln(1+x^2) - x^2 = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x^2 = -\frac{x^4}{2}(1+o(1)) \underset{0}{\sim} -\frac{x^4}{2}$$

   donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^4}{2}}{x^3} = -\frac{x}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{2} = 0$$

   donc f est bien dérivable en 0 (car la limite est finie) et $f'(0) = 0$.

   • **Conclusion :** En regroupant, on en déduit que f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup\{0\}\cup]0;+\infty[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{2(x^2-\ln(1+x^2)(1+x^2))}{x^3(1+x^2)}$ si $x \neq 0$ et $f'(0) = 0$.

3. f est sous forme factorisée, et on obtient une forme indéterminée avec le quotient de limites. On cherche donc un équivalent simple du numérateur pour lever cette indétermination : il y a une somme à l'intérieur de ln, dont le terme prépondérant est x^2 :

$$\ln(1+x^2) = \ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] = \ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

On a maintenant une somme à l'extérieur des ln, et comme un terme tend vers $+\infty$ et l'autre vers 0, le terme prépondérant est évident :

$$\ln(1+x^2) = 2\ln x\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln x}\right).$$

Or par quotient et somme de limites,

$$\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad \text{donc } \ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x).$$

Enfin par quotient d'équivalents,

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln x}{x^2} \quad \text{et par croissances comparées} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{2\ln x}{x^2} = 0.$$

Exercice 3.

1. • φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions usuelle continues , avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ (si $t \neq 0$ alors $e^{-t} \neq 1$ donc $1-e^{-t} \neq 0$) .

• En 0 la fonction a une valeur particulière donc on revient à la définition : on cherche la limite de φ en 0.

φ est sous forme factorisée, avec deux facteurs : chacun des deux tend vers 0, c'est une forme indéterminée. On cherche un équivalent simple du dénominateur pour lever l'indétermination.

Pour cela on remarque qu'il y a une somme, mais les deux termes tendent vers 1, aucun n'est prépondérant. On remarque ensuite que puisque $-t \to 0$, on a une forme de DL :

$$1-e^{-t} = 1-\left(1+(-t)+\frac{(-t)^2}{2}+o((-t)^2)\right) = 1-1+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2) = t\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right).$$

Or

$$\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right) \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \quad \text{donc} \quad t\left(1-\frac{t}{2}+o(t)\right) \underset{0}{\sim} t$$

et enfin par quotient :

$$\varphi(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0}\varphi(t) = \lim_{t\to 0} 1 = 1 = \varphi(0)$$

donc φ est bien continue en 0.

2. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables, avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

• comme 0 est un point particulier, on revient à la définition :

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0} = \frac{\frac{t}{1-e^{-t}}-1}{t} = \frac{\frac{t-1+e^{-t}}{1-e^{-t}}}{t} = \frac{t-1+e^{-t}}{t(1-e^{-t})}.$$

On a une forme indéterminée avec 3 facteurs, on cherche un équivalent simple des deux facteurs plus compliqués pour la lever. Dans les deux cas on ne voit pas de terme prépondérant, mais une forme de DL avec $-t \to 0$:

$$1-e^{-t} \underset{0}{\sim} t$$

d'après la question 1, puis :

$$t-1+e^{-t}=t-1+1+(-t)+\frac{(-t)^2}{2}+o(t^2)=\frac{t^2}{2}+o(t^2)=\frac{t^2}{2}(1+o(1))\underset{0}{\sim}\frac{t^2}{2}$$

donc

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}\underset{0}{\sim}\frac{\frac{t^2}{2}}{t\times t}=\frac{1}{2}\quad\text{donc}\quad\lim_{t\to0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t-0}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

donc φ est bien dérivable en 0 (car la limite est finie) et $\varphi'(0)=\frac{1}{2}$.

3. φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions usuelles de classe C^1, avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

   En 0, on a vu que φ est continue, dérivable (donc φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$), il reste à prouver la continuité de φ' en 0. Pour cela, on connaît $\varphi'(0)$, il reste à trouver $\lim\limits_{t\to0}\varphi'(t)$. Calculons tout d'abord :

$$\varphi'(t)=\frac{1-e^{-t}-e^{-t}\times t}{(1-e^{-t})^2}=\frac{1-e^{-t}-te^{-t}}{(1-e^{-t})^2}.$$

   On a une forme indéterminée sur une forme factorisée, pour la lever on a chercher un équivalent simple de chaque facteur. On a vu plus tôt que :

$$1-e^{-t}\underset{0}{\sim}t\quad\text{donc par produit d'équivalents}\quad(1-e^{-t})^2=(1-e^{-t})\times(1-e^{-t})\underset{0}{\sim}t\times t=t^2.$$

   D'autre part au numérateur on n'a pas de terme prépondérant, on reprend donc avec le DL de e^{-t} :

$$\begin{aligned}1-e^{-t}-te^{-t}&=1-\left(1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)-t\left(1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)=1-1+t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)-t+t^2-\frac{t^3}{2}+o(t^3\\&=\frac{t^2}{2}+o(t^2)=\frac{t^2}{2}(1+o(1))\underset{0}{\sim}\frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

   On en déduit par produit et quotient d'équivalents que :

$$\varphi'(t)\underset{0}{\sim}\frac{\frac{t^2}{2}}{t^2}=\frac{1}{2}\quad\text{puis}\quad\lim_{t\to0}\varphi'(t)=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\varphi'(0)$$

   donc φ' est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}_+$, et φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

4. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et produit de fonctions usuelles dérivables, et :

$$\psi'(t)=-\left[e^{-t}+(1+t)\times(-e^{-t})\right]=-e^{-t}+(1+t)e^{-t}=e^{-t}(-1+1+t)=te^{-t}$$

   Cette dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et nulle en 0, donc ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

5. φ est continue sur $\mathbb{R}_+$, montrons qu'elle est strictement croissante. Or pour tout $t>0$,

$$\varphi'(t)=\frac{1-e^{-t}-te^{-t}}{(1-e^{-t})^2}=\frac{1-(1+t)e^{-t}}{(1-e^{-t})^2}=\frac{\psi(t)}{(1-e^{-t})^2}$$

   est du signe de $\psi(t)$: on a vu que ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $\psi(0)=1-1\times1=0$, donc ψ, et donc ϕ', est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que ϕ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   Enfin ϕ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\left[\varphi(0);\lim\limits_{+\infty}\varphi\right[=\left[1;\lim\limits_{+\infty}\varphi\right[$.

   Calculons cette limite : par somme puis quotient de limites,

$$\lim_{t\to+\infty}1-e^{-t}=1\quad\text{donc}\quad\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=+\infty$$

   et enfin φ réalise bien une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1;+\infty[$.

Exercice 4.

1. On reconnaît le développement limité de $\sqrt{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{2}}$, car $u = -x^2$ tend vers 0 : au voisinage de 0,

$$\sqrt{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{u^2}{2} + o(u^2) = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$$

donc comme $u = -x^2$ tend bien vers 0,

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2) - \frac{1}{8}(-x^2)^2 + o((-x)^2) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

puis

$$g(x) = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

2. On en déduit successivement :
   — $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{2} = g(0)$ donc g est continue en 0.
   — Au voisinage de 0,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}}{x} = \frac{1}{8}x + o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

   donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

3. On en déduit (avec la formule connue depuis longtemps ou par lecture du DL) que g admet au voisinage de 0 une tangente d'équation :

$$y = \frac{1}{2}.$$

   De plus au voisinage de 0,

$$g(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) = +\frac{1}{8}x^2(1 + o(1)) \underset{0}{\sim} \frac{1}{8}x^2$$

   donc $g(x) - \frac{1}{2}$ est, au voisinage de 0, du même signe que $\frac{1}{8}x^2$, donc positive : la courbe se situe donc, localement, au-dessus de sa tangente.

Exercice 5.

1. (a) En 0^+, $x \to 0$ et :

$$\frac{1}{x} \to +\infty \quad \text{donc} \quad -\frac{1}{x} \to -\infty \quad \text{puis} \quad e^{-\frac{1}{x}} \to 0$$

   donc par produit de limites,

$$xe^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0)$$

   donc f est continue à droite en 0.

   (b) On cherche la limite du taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{x - 0} = e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

   (déjà vu à la première question) donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. En 0^-, on obtient par composée
$$e^{-\frac{1}{x}} \to +\infty$$
donc c'est une forme indéterminée. Il n'y a aucune somme à simplifier et aucun DL (l'exponentielle est prise en $+\infty$) donc il faut lever l'indétermination uniquement avec les croissances comparées : l'astuce est de poser le changement de variable $y = -\frac{1}{x} \iff x = -\frac{1}{y}$, avec y qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 :
$$\lim_{x\to 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} -\frac{1}{y}e^y = +\infty$$
par croissances comparées, donc f est continue à gauche en 0, et finalement elle est bien continue en 0.

En $-\infty$, par composée $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc par produit :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

De même en $+\infty$, par composée $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3. (a) Au voisinage de $0\pm\infty$, $u = -\frac{1}{x}$ tend vers 0 donc on peut utiliser le DL de l'exponentielle :
$$e^{-\frac{1}{x}} = 1 + \left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)^2}{2} + o_{\pm\infty}\left[\left(-\frac{1}{x}\right)^2\right] = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
On multiplie par x et on obtient :
$$f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} = x - 1 + \frac{1}{2x} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

(b) On remarque alors qu'au voisinage de $\pm\infty$, $f(x)$ s'écrit sous la forme :
$$f(x) = x - 1 + g(x)$$
avec $x \mapsto x - 1$ une fonction affine et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C_f en $\pm\infty$.

Etudions à présent le signe au voisinage de $\pm\infty$ de :
$$f(x) - (x-1) = \frac{1}{2x} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x}(1 + o_{\pm\infty}(1)) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$
qui est donc du même signe, au voisinage de $\pm\infty$, que $\frac{1}{2x}$: il est donc négatif au voisinage de $-\infty$ et positif au voisinage de $+\infty$.

Finalement C_f est en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$, et au-dessus au voisinage de $+\infty$.

Exercice 6.

1. Réécrivons tout d'abord la racine n-ième sous forme de puissance puis sous la forme exponentielle (on ne sait absolument rien dire sur des limites avec des puissances variables ! ! !)
$$u_n = n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(e^{\frac{1}{n}\ln(2)} - 1\right)$$
qui donne une forme indéterminée, puisque n tend vers $+\infty$ et le deuxième facteur vers $e^0 - 1 = 0$.

On doit donc trouver un équivalent simple de ce deuxième facteur, qui n'a pas de terme prépondérant (les 2 tendent vers 1) ; mais comme $\frac{1}{n}\ln(2)$ tend vers 0 en $+\infty$, on reconnaît le DL de e^u :

$$e^{\frac{1}{n}\ln(2)}-1 = 1+\left(\frac{1}{n}\ln(2)\right)+\frac{\left(\frac{1}{n}\ln(2)\right)^2}{2}+o\left[\left(\frac{1}{n}\ln(2)\right)^2\right]-1 = \frac{\ln 2}{n}+\frac{\ln 2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\ln 2}{n}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{2n}\right)\right)$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{2n}\right)\right) = 1$$

donc

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} n\times\frac{\ln 2}{n} = \ln 2$$

et (u_n) converge donc vers $\ln 2$.

2. De même on écrit la puissance variable sous forme exponentielle :

$$v_n = n\left(e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$$

Cherchons la limite du deuxième facteur : comme $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est une forme indéterminée, pour lever cette forme indéterminée, on doit écrire le DL de $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{donc} \quad n\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit par somme et composée de limites que :

$$e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et on a donc une forme indéterminée. Pour la lever, reprenons le 2e facteur : on factorise par e, puis on retrouve une nouvelle forme de DL (cette fois c'est l'exponentielle) :

$$e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e-e^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = e\left(1-e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$$

avec

$$e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1+\left[-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\left[-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2+o\left(\left[-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2\right)$$

On développe en pensant à éliminer tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 puisqu'il y a un o( ) d'ordre 1 : tous les termes du carré et du $o([..]^2)$ disparaissent et on obtient :

$$e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis :

$$v_n = n\times e\left(1-\left[1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right) = n\times e\left[\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = n\times e\times\frac{1}{2n}(1+o(1)) = \frac{e}{2}(1+o(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e}{2}.$$

Exercice 7.

1. (a) On cherche la limite de f en 0. Comme il y a une puissance qui dépend de x, on passe à la forme exponentielle et on écrit :

$$f(x) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$$

car par somme de limites $\left(1+\frac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ et $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc par produit puis composée :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty \quad \text{puis} \quad e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0.$$

Or $f(0)=0$, donc f est continue en 0.

(b) On cherche la limite du taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\, e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 0}{x} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}.$$

Par quotient (pas de croissance comparée !!) puis composées de limites on en obtient alors :

$$\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \quad \text{puis} \quad e^{\frac{\ln(x)}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

donc f est dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

2. (a) Étudions la fonction $g(x) = \ln(x) - x - 1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
g est dérivable et

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

est du signe de $1-x$ car $x > 0$, donc strictement positive avant 1, nulle en 1 et strictement négative après.

g est donc strictement croissante sur $]0;1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ et admet un maximum strict en 1, avec

$$g(1) = \ln(1) - 1 - 1 = -2 < 0$$

donc pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$g(x) < 0 \iff \ln(x) < x + 1.$$

(b) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit puis composée de fonctions dérivables et :

$$f'(x) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)} \times \left(-\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1+\frac{1}{x}}{x}\right) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)} \times \frac{-\ln(x)+x+1}{x^2}.$$

La question précédente montre que

$$-\ln(x) + x + 1 > 0$$

et on a $x^2 > 0$ et $e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)} > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$ et f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

3. On obtient immédiatement

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

donc par produit

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x) = +\infty.$$

De plus $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc par composée

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

4. (a) On pose $x = 1+t$, donc $f(x) = (1+t)\, e^{\frac{\ln(1+t)}{1+t}}$.

Écrivons les développements limités de $\ln(1+t)$ et $\frac{1}{1+t}$:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$$

donc :

$$\frac{\ln(1+t)}{1+t} = \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \times \left(1 - t + t^2 + o(t^2)\right) = t - \frac{t^2}{2} - t^2 + o(t^2) = t - \frac{3}{2}t^2 + +o(t^2).$$

On compose avec le DL de l'exponentielle ($e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$) et on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\frac{\ln(1+t)}{1+t}} &= 1 + \left(t - \frac{3}{2}t^2\right) + \frac{\left(t - \frac{3}{2}t^2\right)^2}{2} + o(t^2) \\ &= 1 + t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \\ &= 1 + t - t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

D'où

$$f(1+t) = (1+t) \times \left(1 + t - t^2 + o(t^2)\right) = 1 + t - t^2 + t + t^2 + o(t^2) = 1 + 2t + o(t^2)$$

ce qui donne bien :

$$f(x) = 1 + 2(x-1) + o\left((x-1)^2\right)$$

(b) La tangente T à C_f au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$$

On remarque que cette équation correspond bien au DL tronqué à l'ordre 1 de f au voisinage du point 1.

(c) Avec le DL donné, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} f(x) - (2x-1) &= 1 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right) - (2x-1) \\ &= 1 + 2x - 2 - 2x + 1 - \frac{1}{2}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right) = -\frac{1}{2}(x-1)^3\left[1 + o(1)\right] \\ &\underset{1}{\sim} -\frac{1}{2}(x-1)^3 \end{aligned}$$

Cette fonction, qui a le même signe que $f(x) - (2x-1)$ au voisinage de 1, est positive avant 1 car $(x-1) \leq 0$ donc $(x-1)^3 \leq 0$ et négative après 1.

On en déduit que la courbe C_f est au-dessus de sa tangente avant le point 1, et en-dessous après le point 1 : elle traverse donc sa tangente au point $(1, f(1)) = (1, 1)$, qui est donc un point d'inflexion de la fonction f.

(d) On trace d'abord la tangente (il suffit de prendre deux points et de tracer la droite. Ensuite on trace une courbe croissante passant par $(0, 0)$ et allant à $+\infty$ en $+\infty$, en faisant attention qu'elle soit tangente à la droite qu'on vient de tracer au point 1, et qu'elle traverse cette tangente en passant au-dessus avant puis en-dessous après.