TD 4 : suites récurrentes et suites implicites

1 Suites implicites

Une suite implicite est une suite (u_n) de réels dont on a prouvé l'existence mais dont on ne connait pas la valeur. On dit alors qu'ils sont définis implicitement.
Ces réels sont souvent tous solution d'une équation du type $f(x) = constante$, que l'on ne sait pas résoudre mais dont on prouve l'existence d'une solution par le théorème de la bijection.

Méthode d'étude des suites implicites :
- Pour prouver l'existence des termes d'une suite implicite, il faut invoquer proprement le théorème de la bijection.
- Pour étudier la suite, il faut toujours utiliser l'équation vérifiée par la suite . En effet, on ne connait pas explicitement les termes de la suite, mais on connait explicitement la suite de leurs images par f, donc :
1) on regarde les images et on les compare ;
2) On en déduit les propriétés de la suite.

Exercice 1.
Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x\ln(1 + x)$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un ensemble que l'on déterminera.
2. On considère à présent pour tout n entier naturel non nul l'équation :

$$f(x) = \frac{1}{n^2} \qquad (E_n)$$

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) a une unique solution strictement positive. On la notera α_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\alpha_n \geq \frac{1}{n^2}$.
   (c) Montrer que la suite α est décroissante et convergente.
   (d) Déterminer la limite de la suite α puis montrer que $\alpha_n \sim \frac{1}{n}$

Exercice 2.
Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$, notée x_n.
2. Calculer x_2.
3. Etudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[0, 1]$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
4. Déterminer la monotonie de la suite $(x_n)_n$ et montrer sa convergence.
5. Justifier que : $\forall n \geq 2$, $0 \leq x_n \leq \frac{2}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
6. Déterminer la limite de x_n^n, puis montrer que $x_n \sim \frac{1}{n}$

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction réelle f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique nombre réel négatif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > -1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente.
5. Calculer la limite ℓ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
6. La série de terme général $y_n = x_n - \ell$ est-elle convergente ?

2 Suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 4.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble I de définition (à déterminer).
   Préciser le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0, puis au point d'abscisse 1.
   (b) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq x$. Etudier les cas d'égalité.
   (c) Tracer C et $D : y = x$ dans le même repère.
2. (a) Démontrer que f réalise une bijection de I dans un ensemble à déterminer.
   (b) Expliciter la bijection réciproque f^{-1} de f et dresser son tableau de variations.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n}{2-u_n}}$.
   (a) Tracer les premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique de la question 1.(c).

   En utilisant l'étude de la fonction f, répondre aux questions suivantes :
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$
   (c) Justifier que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5.
Soit $f : \begin{array}{rcl} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(1+x) \end{array}$. On rappelle que l'on sait d'après l'exercice 1 que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0;+\infty[$. .
2. On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1;+\infty[$.
   (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $e - 1 < u_n \leq u_{n+1}$.
   (b) En déduire que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On suppose, dans cette question : $u_0 \in]0; e-1[$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6.
On étudie la suite définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = -u_n \ln(u_n)$.

1. Etudier $f : x \mapsto -x\ln(x)$ .Vérifier que l'intervalle $I =]0, \frac{1}{e}[$ est stable par f.
2. Cas $u_0 \geq 1$: La suite est-elle bien définie ?
3. Cas $u_0 = \frac{1}{e}$: Calculer u_1. Que peut-on dire de la suite ?
4. Cas $u_0 \in]0, \frac{1}{e}[$:
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \frac{1}{e}[$.
   (b) Comparer u_0 et u_1. Montrer que la suite u est croissante.
   (c) Prouver que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. Cas $u_0 \in]\frac{1}{e}, 1[$: Encadrer u_1 . Conclure quant à la convergence de (u_n) .

Exercice 7.
Etude de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + e - 1$ pour différentes valeurs de u_0.

1. On introduit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)+e-1$ et la fonction g définie par $g(x) = f(x)-x$.
   (a) Etudier les variations de f.
   (b) Etudier le signe de g. On pourra introduire un réel α implicite.
2. On étudie ici la suite u dans le cas où $u_0 > e$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > e$.
   (b) En déduire que u est décroissante et convergente.

(c) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

3. On étudie ici le cas où $u_0 = 1$

   (a) Montrer que pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1} \leq e$

   (b) En déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

4. On étudie ici la suite u dans le cas où $0 < u_0 < \alpha$. (α défini au **1.b)**). On se propose de démontrer *par l'absurde* qu'à partir d'un certain rang, la suite u n'est plus définie.
   On suppose pour celà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   (a) Montrer que $u_1 < u_0$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} < u_n < \alpha$.

   (b) Montrer que la limite ℓ de u ne peut pas être strictement positive.

   (c) Montrer que $\ell = 0$ et conclure à l'aide de la limite de f en 0.

Exercice 8.
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{5 + 4u_n}$.

1. **Existence des termes de la suite** : Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 5$.
2. **Limites finies possibles :** Déterminer la seule limite finie possible de (u_n).
3. **Convergence :** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 5| \leq \frac{2}{3}|u_n - 5|$. En déduire que :$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 5| \leq 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Conclure.

Exercices supplémentaires

Exercice 9.

Pour tout entier $k \geq 2$, on définit $f_k(x) = \begin{cases} \frac{(\ln(x))^k}{x-1} \text{ si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

Première partie : Étude des fonctions f_k.
a) Soit $k \geq 2$. Démontrer que f_k est dérivable pour $x \neq 1$ et déterminer sa dérivée.

b) Démontrer que f_k est dérivable en 1 et déterminer $f_k'(1)$.

c) Soit $\varphi_k(x) = k(x-1) - x\ln(x)$. Étudier les variations de φ.

d) Démontrer que l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1; +\infty[$; on la note a_k.

e) Donner le tableau de variations de f_k (on séparera les cas k pair et $k \geq 2$ et k impair et $k \geq 3$).

Deuxième partie : Étude asymptotique de la suite $(a_k)_{k\geq 2}$.
a) Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$. En déduire la limite de (a_k).

b) Pour tout $k \geq 2$, on pose $a_k = e^k(1 + b_k)$.
Démontrer que b_k vérifie l'équation : $-ke^{-k} = (1 + b_k)\ln(1 + b_k)$.

c) Démontrer que $\ln(1 + b_k) \geq -ke^{1-k}$; en déduire la limite de (b_k) et $b_k \sim -ke^{-k}$.

d) En déduire que $a_k = e^k - k + o(k)$ lorsque $k \to +\infty$.

Exercice 10.
On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{5}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{4}{1+u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Calculer les premiers termes de la suite, est-elle monotone ?
2. Etudier rapidement la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{4}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Représenter f et les premiers termes de la suite.
3. Déterminer les limites possibles de la suite u.
4. soient v et w les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_p = u_{2p}$ et $w_p = u_{2p+1}$.
   (a) Déterminer la fonction g telle que $\forall p \in \mathbb{N}$, $v_{p+1} = g(v_p)$ et $w_{p+1} = g(w_p)$.
   (b) Donner le sens de variations de g sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer le signe de $g(x) - x$. Montrer que les deux intervalles $[0, \sqrt{5}[$ et $[\sqrt{5}, +\infty[$ sont stables par g.
   (c) En déduire que les deux suites v et w sont convergentes. Vers quelle limite ?
   (d) Vérifier que la suite u et convergente.