Corrigé du TD 4

I Suites implicites

Une suite implicite est une suite (u_n) de réels dont on a prouvé l'existence mais dont on ne connait pas la valeur. On dit alors qu'ils sont définis implicitement.

Ces réels sont souvent tous solution d'une équation du type f(x) = constante, que l'on ne sait pas résoudre mais dont on prouve l'existence d'une solution par le théorème de la bijection.

Méthode d'étude des suites implicites :

- Pour prouver l'existence des termes d'une suite implicite, il faut invoquer proprement le théorème de la bijection.
- Pour étudier la suite, il faut toujours utiliser l'équation vérifiée par la suite. En effet, on ne connait pas explicitement les termes de la suite, mais on connait explicitement la suite de leurs images par f, donc :
- 1) on regarde les images et on les compare;
- 2) On en déduit les propriétés de la suite.

Exercice 1.

Soit f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x \ln(1+x)$.

1. Etudions la fonction f sur \mathbb{R}_+ : f est dérivable comme produit de fonctions dérivables (la composée étant bien définie car si $x \ge 0$ alors $1 + x \ge 1 > 0$) et

$$f'(x) = x \times \frac{1}{1+x} + \ln(1+x)$$

donc f'(x) est strictement positif sur \mathbb{R}_+^* comme somme de deux termes strictement positif et positif $(1+x \ge 1 \text{ donc } \ln(1+x) \ge 0)$ et le numérateur est strictement positif donc on obtient :

x	0	$+\infty$	
f'(x)	0	+	
f(x)	0	+∞	

 $\operatorname{car} \, f'(x) = 0 \times \ln(1) = 0 \text{ et par produit de limites, } f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} + \infty.$

f est donc continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ donc réalise une bijection de \mathbb{R}_+ dans $\left[f(0); \lim_{x \to +\infty} f(x)\right] = [0; +\infty[$.

2. On considère à présent pour tout n entier naturel non nul l'équation :

$$f(x) = \frac{1}{n^2} \tag{E_n}$$

- (a) On remarque que $\frac{1}{n^2} \in [0; +\infty[=f(\mathbb{R}_+), \text{ donc d'après la question 1, l'équation } f(x) = \frac{1}{n^2} \text{ admet une unique solution dans } \mathbb{R}_+; \text{ de plus } f(0) = 0 \neq \frac{1}{n^2} \text{ donc cette solution n'est pas } 0: \text{ elle est donc strictement positive.}$
- (b) Comme α_n est implicite, on compare $f(\alpha_n)$ avec $f(\frac{1}{n^2})$: on sait que $f(\alpha_n) = \frac{1}{n^2}$ d'une part, et d'autre part :

$$f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

1

On cherche alors le signe de

$$f(\alpha_n) - f\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} \left[1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right]$$

qui est du même signe que $1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \ln(e) - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$. Or on sait que

$$n \ge 1 \Longrightarrow n^2 \ge 1 \Longrightarrow \frac{1}{n^2} \le 1 \Longrightarrow 1 + \frac{1}{n^2} \le 2 \le e$$

donc par croissance de ln,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \le \ln(e) = 1 \quad \text{donc} \quad 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \ge 0$$

et donc

$$f(\alpha_n) - f\left(\frac{1}{n^2}\right) \ge 0 \Longrightarrow f(\alpha_n) \ge f\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et comme f est strictement croissante on obtient finalement :

$$\alpha_n \ge \frac{1}{n^2}$$
.

(c) Pour la décroissance, on veut prouver que $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$: on compare donc leurs images par f:

$$f(\alpha_n) = \frac{1}{n^2}$$
 et $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Comme $n \leq n+1$, par croissance du carré puis décroissance de l'inverse, on obtient

$$\frac{1}{n^2} = f(\alpha_n) \ge f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

et enfin par croissance de f,

$$\alpha_n \ge \alpha_{n+1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la suite (α_n) est décroissante.

De plus on a vu qu'elle est minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite L qui vérifie $L \geq 0$.

(d) On compose par f, qui est continue, la relation $\alpha_n \to L$, et on obtient :

$$f(\alpha_n) \to f(L)$$
.

Or on sait que la suite $f(\alpha_n)$ vaut :

$$f(\alpha_n) = \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On en déduit que $f(L) = 0 \Leftrightarrow L = f^{-1}(0) = 0$

$$L = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0.$$

On veut à présent prouver que $\alpha_n \sim \frac{1}{n}$ donc que $n\alpha_n \to 1$.

Comme on ne connaît pas $f(n\alpha_n)$, composer par f directement ne sert à rien. On reprend alors $f(\alpha_n)$:

$$f(\alpha_n) = \frac{1}{n^2} = \alpha_n \ln(1 + \alpha_n).$$

Or $\alpha_n \to 0,$ donc les équivalents usuels puis un produit d'équivalents donnent :

$$\ln(1+\alpha_n) \sim \alpha_n$$
 puis $\frac{1}{n^2} = \alpha_n \ln(1+\alpha_n) \sim (\alpha_n)^2$

On en déduit en composant par la racine (qui est une puissance, seules fonctions par lesquelles on peut composer un équivalent) que :

$$\alpha_n \sim \frac{1}{n}$$
.

Exercice 2.

Pour tout entier $n \ge 2$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. On étudie la fonction f_n sur [0;1], car

$$x^{n} + 1 = nx \Longleftrightarrow x^{n} - nx + 1 = f_{n}(x) = 0.$$

 f_n est dérivable sur [0;1] comme somme de fonctions usuelles dérivables et :

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1).$$

Or on sait que, et on compose ensuite par la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ croissante :

$$0 \le x \le 1 \Longrightarrow 0 \le x^{n-1} \le 1 \Longrightarrow -1 \le x^{n-1} - 1 \le 0$$

et de plus n > 0, donc $f'_n(x) \le 0$ sur [0;1] (et ne s'annule qu'en 1) donc f_n est strictement décroissante sur [0;1].

Elle est de plus continue donc réalise une bijection de [0;1] dans $[f_n(1);f_n(0)]=[2-n;1]$.

Enfin on sait que $n \ge 2$ donc $2 - n \le 0$, donc $0 \in [2 - n; 1]$ et l'équation $f_n(x) = 0$, et donc l'équation $x^n + 1 = nx$ admettent une unique solution x_n sur [0; 1].

2. x_2 est solution de l'équation :

$$x^{2} + 1 - 2x = 0 \iff (x - 1)^{2} = 0 \iff x = 1$$

donc on en déduit que $x_2 = 1$.

3. On factorise au maximum et on étudie les signes de chaque facteur :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 1 - (n+1)x - [x^n + 1 - nx] = x^{n+1} + 1 - nx - x - x^n - 1 + nx = x^{n+1} - x^n - x = x(x^n - x^{n-1} - 1).$$

Le facteur $x^n - x^{n-1} - 1$ n'a pas de signe évident par somme de signe, mais on remarque que $x \in [0; 1]$ donc en multipliant par $x^{n-1} \ge 0$:

$$0 \le x \le 1 \Longrightarrow 0 \le x^n \le x^{n-1} \Longrightarrow x^{n-1} - x^n \le 0 \Longrightarrow x^{n-1} - x^n - 1 \le -1 \le 0$$

donc par produit on en déduit que $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est nulle en 0 puis strictement négative sur]0;1].

On en déduit en $x = x_n$ que :

$$f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) < 0 \Longrightarrow f_{n+1}(x_n) - 0 < 0 \Longrightarrow f_{n+1}(x_n) < 0.$$

4. Comme x_n est définie avec la fonction f_n et x_{n+1} avec la fonction f_{n+1} , il y a deux possibilités pour composer par une fonction. Mais la question précédente lève le doute et on compare donc :

$$f_{n+1}(x_n) < 0$$
 et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$

On obtient donc par stricte décroissance de f_{n+1} que :

$$f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$$
 donc $x_n > x_{n+1}$

et la suite (x_n) est décroissante. De plus elle est minorée par 0 donc converge vers une limite $L \geq 0$.

5. On sait déjà que $x_n \ge 0$, et pour le seconde inégalité on s'intéresse à :

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2^n}{n^n} + 1 - n \times \frac{2}{n} = \frac{2^n}{n^n} - 1 = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1.$$

Puisque $f_n(x_n)=0$, on s'intéresse au signe de cette quantité : on remarque $n\geq 2$ donc :

$$\frac{2}{n} \le 1 \Longrightarrow \left(\frac{2}{n}\right)^n \le 1^n = 1 \Longrightarrow \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 \le 0.$$

On en déduit par stricte décroissance de f_n que :

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) \le f_n(x_n) \Longrightarrow \frac{2}{n} \ge x_n$$

et finalement on obtient bien:

$$0 \le x_n \le \frac{2}{n}.$$

On en déduit par encadrement que :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0.$$

6. Comme x_n^n a une variable n en puissance, on passe sous forme exponentielle :

$$x_n^n = e^{n \ln(x_n)}$$

et on obtient par composée, produit puis composée :

$$\lim x_n = 0 \Longrightarrow \lim \ln(x_n) = -\infty \Longrightarrow \lim n \ln(x_n) = -\infty \Longrightarrow \lim x_n^n = e^{n \ln(x_n)} = 0.$$

On revient alors à la définition de x_n :

$$f_n(x_n) = 0 = x_n^n + 1 - nx_n.$$

On en déduit par somme de limites que :

$$\frac{x_n}{\frac{1}{n}} = nx_n = 1 + x_n^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

donc

$$x_n \sim \frac{1}{n}$$
.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction réelle f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}$.

1. On étuide la fonction f_n sur \mathbb{R}_- , quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$:

 f_n est dérivable sur \mathbb{R}_- comme somme de fonctions dérivables et $f'_n(x) = 1 - \frac{e^x}{n} = \frac{n - e^x}{n} > 0$ car $x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \le n$.

 f_n est donc continue (car dérivable) et strictement croissante sur \mathbb{R}_- ; avec $\lim_{n \to \infty} f_n = -\infty$ et $f_n(0)=1-\frac{1}{n}>0$ donc ; par théorème de la bijection ; il existe un unique réel négatif ; noté x_n ; tel que $f_n(x_n)=0$.

- 2. On compose par f_n :

• $f_n(x_n) = 0$ d'après la question précédente; • $f_n(-1) = -\frac{e^{-1}}{n} < 0 = f_n(x_n)$ Donc en composant par f_n^{-1} strictement décroissante sur \mathbb{R}_- (car de même variation que f_n) on obtient:

$$-1 < x_n$$

- 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $f_{n+1}(x) f_n(x) = \frac{e^x}{n} \frac{e^x}{n+1} = \frac{e^x}{n(n+1)} > 0$.
- 4. En posant $x = x_n$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$f_{n+1}(x_n) > f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

En composant par f_{n+1}^{-1} strictement croissante, on obtient :

$$x_n > x_{n+1}$$

La suite (x_n) est donc strictement décroissante.

 \bullet La suite est décroissante et minorée par -1 donc converge vers un réel $l \geq -1$ (par passage à la limite)

5. Déterminons 1:

On passe à la limite dans l'égalité : $f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n + 1 - \frac{e^{x_n}}{n} = 0$ (*); avec $\lim_{n \to +\infty} e^{x_n} = e^l$ par continuité de la fonction exp en l et $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{x_n}}{n} = 0$. Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$, l'égalité (*) devient donc $l+1=0 \Leftrightarrow l=-1$.

6. car $f_n(x_n) = 0$.

Ainsi,
$$y_n = \frac{e^{x_n}}{n} \simeq \frac{e^{-1}}{n} = \frac{1}{e} \frac{1}{n} (>0)$$

Ainsi, $y_n = \frac{e^{x_n}}{n} \simeq \frac{e^{-1}}{n} = \frac{1}{e} \frac{1}{n} (>0)$ Or la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$ (Riemann avec $\alpha = 1$) donc par théorème de comparaison sur les séries à terme général positif, la série de terme général y_n diverge également.

Suites récurrentes II

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Comme la racine n'est définie que sur \mathbb{R}_+ , on cherche le signe de $\frac{x}{2-x}$: par quotient on obtient rapidement:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		_	0	+		+	
2-x		+		+	Ö	_	
$\frac{x}{2-x}$		-	0	+		-	

et on en déduit que f est définie sur [0; 2].

De plus f est dérivable sur [0; 2[(l'intérieur de la racine ne doit pas être nul) et :

$$f'(x) = \frac{1 \times (2 - x) - (-1) \times x}{(2 - x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2 - x}}} = \frac{2 - x + x}{(2 - x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2 - x}}} = \frac{1}{(2 - x)^2\sqrt{\frac{x}{2 - x}}} > 0$$

car un carré et une racine sont toujours positifs. On en déduit que f est strictement croissante $\operatorname{sur} [0; 2[, \operatorname{donc} :$

x	0	2
f'(x)	+	
f	0	+∞

car $f(0) = \sqrt{\frac{0}{2}} = \sqrt{0} = 0$ et $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ par quotient et composée de limites, avec $x \to 2$

De plus le coefficient directeur de la tangente étant la dérivée, au point 1 on a :

$$f'(1) = \frac{1}{(2-1)^2 \sqrt{\frac{1}{2-1}}} = \frac{1}{1^2 \sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Au pont 0 vérifions la dérivabilité de f:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{\frac{x}{2 - x}} - 0}{x} = \frac{\sqrt{2 - x}}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} + \infty$$

donc f n'est pas dérivable au point 0 mais admet une tangente verticale, donc dont le coefficient directeur est infini.

(b) Pour obtenir cette inégalité, on la compose par le carré croissant sur ℝ₊ pour éliminer la racine :

$$f(x) - x = \sqrt{\frac{x}{2 - x}} - x = \frac{\frac{x}{2 - x} - x^2}{\sqrt{\frac{x}{2 - x}} + x} = \frac{x - x^2(2 - x)}{(2 - x)\left(\sqrt{\frac{x}{2 - x}} + x\right)} = \frac{x(1 - 2x + x^2)}{(2 - x)\left(\sqrt{\frac{x}{2 - x}} + x\right)} = \frac{x(x - 1)^2}{(2 - x)\left(\sqrt{\frac{x}{2 - x}} + x\right)}$$

Or sur [0; 2[, on sait que $x \ge 0$, $(x-1)^2 \ge 0$ et 2-x > 0 donc par produit et quotient on obtient

$$\frac{x(x-1)^2}{(2-x)\left(\sqrt{\frac{x}{2-x}}+x\right)} \ge 0 \quad \text{ et donc } \quad f(x) \ge x.$$

L'égalité est équivalente à

$$\frac{x(x-1)^2}{(2-x)\left(\sqrt{\frac{x}{2-x}}+x\right)} = 0 \Longleftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

- (c) La courbe C doit toucher la droite D en x=0 et x=1, et rester au-dessus tout du long. Elle arrive de plus à $+\infty$ et x=2 (asymptote verticale d'équation x=2).
- 2. (a) f est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de [0; 2[dans $[f(0); \lim_{+\infty} f[$ = $[0; +\infty[$.
 - (b) On résout l'équation, pour y fixé dans $[0; +\infty[$:

$$f(x) = y \Longleftrightarrow \frac{x}{2-x} = y^2 \Longleftrightarrow x = y^2(2-x) \Longleftrightarrow x = 2y^2 - y^2x \Longleftrightarrow x(1+y^2) = 2y^2 \Longleftrightarrow x = \frac{2y^2}{1+y^2}.$$

donc la bijection réciproque de f est :

$$f^{-1}(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$$

dont le tableau de variations est, par lecture inverse de celui de f:

x	0	+∞
f^{-1}	0	2

- 3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n}{2-u_n}}$.
 - (a)
 - (b) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 1$:
 - **Initialisation**: on sait que $u_0 = 1/2$, il se trouve bien entre 0 et 1.
 - **Hérédité** : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 \le u_n \le 1$. Alors par croissance de f on a

$$f(0) \le f(u_n) \le f(1) \iff 0 \le u_{n+1} \le \sqrt{\frac{1}{2-1}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = \sqrt{1} = 1$$

et la propriété est vraie au rang n+1.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \le u_n \le 1.$$

6

(c) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$:

— **Initialisation** : on sait que $u_0 = 1/2$ et

$$u_1 = f(1/2) = \sqrt{\frac{1/2}{2 - 1/2}} = \sqrt{\frac{1}{4 - 1}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Pour le comparer à u_0 comparons leurs carrés :

$$u_1^2 = \frac{1}{3}$$
 et $u_0^2 = \frac{1}{4}$

donc par stricte croissance de la racine carrée,

$$u_0^2 < u_1^2 \Longrightarrow u_0 < u_1$$

et la propriété est vraie au rang n = 0.

— **Hérédité** : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n \leq u_{n+1}$. Alors par croissance de f on a

$$f(u_n) \le f(u_{n+1}) \Longleftrightarrow u_{n+1} \le u_{n+2}$$

et la propriété est vraie au rang n+1.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1}$$

et la suite (u_n) est croissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc converge vers une limite $L \in [0;1]$ car $0 \le u_n \le 1$ pour tout n.

De plus par continuité de f cette limite vérifie, par passage à la limite de $u_{n+1} = f(u_n)$,

$$f(L) = L \iff L \in \{0; 1\}$$

d'après la question 1b).

Enfin comme $u_0 = 1/2$ et (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \ge u_0 = 1/2$, donc $L \ge 1/2$ ce qui exclut la valeur 0: on en déduit que la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 5.

Soit
$$f: [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

 $x \longmapsto x \ln(1+x)$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in]0;+\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N},$ $u_{n+1}=f(u_n).$ L'exercice 1 nous donne :

x	0		$+\infty$
f'(x)	0	+	
f(x)	0		$+\infty$

1. On résout :

$$f(x) = x \iff x \ln(1+x) - x = 0 \iff x[\ln(1+x) - 1] = 0$$

Comme produit nul, cette équation est équivalente à :

$$\left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ \text{ou } \ln 1+x-1=0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ \text{ou } \ln 1+x=1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ \text{ou } 1+x=e \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ \text{ou } x=e-1 \end{array} \right.$$

2. On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1; +\infty[$.

- (a) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e-1 < u_n \le u_{n+1}$:
 - **Initialisation**: on sait que $u_0 > e 1$, montrons alors que $u_1 \ge u_0$: on sait que

$$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = u_0 \ln(1 + u_0) - u_0 = u_0 [\ln(1 + u_0) - 1]$$

Or $u_0 > 0$, et $u_0 > e - 1$ donc (avec ln strictement croissante):

$$1 + u_0 > e \Longrightarrow \ln(1 + u_0) > \ln(e) = 1 \Longrightarrow \ln(1 + u_0) - 1 > 0$$

et par produit,

$$u_1 - u_0 > 0$$
 et donc $u_0 < u_1$

et la propriété est vraie au rang n = 0.

— **Hérédité** : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $e-1 < u_n \le u_{n+1}$, alors en composant par f strictement croissante sur \mathbb{R}_+ on a :

$$f(e-1) < f(u_n) \le f(u_{n+1})$$
 donc $e-1 < u_{n+1} \le u_{n+2}$

et la propriété est vraie au rang n+1.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e - 1 < u_n \le u_{n+1}$$
.

(b) On en déduit que la suite (u_n) est croissante. Supposons qu'elle soit majorée, alors elle convergerait vers un réel L, et comme (u_n) est croissante on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge u_0 \Longrightarrow L \ge u_0$$

De plus comme f est continue, en passant à la limite $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient :

$$f(L) = L \iff L \in \{0; e - 1\}$$

Comme aucune de ces limites n'est strictement supérieure à u_0 ($u_0 > e - 1$ par hypothèses) on obtient une absurdité.

La suite (u_n) n'est donc pas convergente, elle diverge donc vers $+\infty$ (car elle est croissante).

- 3. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \le u_n < e-1$:
 - **Initialisation**: on sait que $0 < u_0 < e 1$, montrons alors que $u_1 \le u_0$: on sait que

$$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = u_0 \ln(1 + u_0) - u_0 = u_0 [\ln(1 + u_0) - 1]$$

Or $0 < u_0 < e - 1$ donc (avec ln strictement croissante):

$$1 < 1 + u_0 < e \Longrightarrow \ln(1) = 0 < \ln(1 + u_0) < \ln(e) = 1 \Longrightarrow -1 < \ln(1 + u_0) - 1 < 0$$

et par produit,

$$u_1 - u_0 < 0$$
 et donc $u_1 < u_0$

Enfin comme $0 < u_0we_-1$, en composant par f strictement croissante sur \mathbb{R}_+ on obtient:

$$f(0) = 0 < f(u_0) = u_1 < f(e-1) = e-1$$

et finalement en rassemblant on a bien :

$$0 < u_1 \le u_0 < e - 1$$

et la propriété est vraie au rang n = 0.

— **Hérédité** : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 < u_{n+1} \le u_n < e-1$, alors en composant par f strictement croissante sur \mathbb{R}_+ on a :

$$f(0) < f(u_{n+1}) \le f(u_n) < f(e-1)$$
 donc $0 < u_{n+2} \le u_{n+1} < e-1$

et la propriété est vraie au rang n+1.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_{n+1} \le u_n < e - 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite L qui, sur le même modèle qu'à la question précédente, vérifie f(L) = L donc qui est soit 0 soit e-1.

Enfin comme (u_n) est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq u_0$ donc $L \leq u_0 < e - 1$, et la seule limite possible restante est donc 0 : on en déduit que (u_n) converge vers 0.

Exercice 6.

On étudie la suite définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = -u_n \ln(u_n)$.

1. f est définie et dérivable sur \mathbb{R}_{+}^{*} , et on a :

$$f'(x) = -\left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = -\ln x - 1.$$

On résout l'inéquation $-\ln x - 1 \ge 0$:

$$-\ln x - 1 \ge 0 \iff \ln x \le -1 \iff x \le e^{-1} = \frac{1}{e}$$

donc on obtient:

x	0	$1/e$ $+\infty$
f'(x)		+ 0 -
f(x)		$0 \qquad \qquad -\infty$

ou la limite en 0 est une croissance comparée immédiate et celle en $+\infty$ un produit de limites immédiat, et enfin :

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}(\ln(1) - \ln(e)) = -\frac{1}{e}(0 - 1) = \frac{1}{e}.$$

Comme f est continue et strictement croissante sur $[0; \frac{1}{e}]$, on obtient alors :

$$f\left(\left]0; \frac{1}{e}\right[\right) = \lim_{x \to 0} f(x); f\left(\frac{1}{e}\right)\left[=\right]0; \frac{1}{e}\left[$$

donc l'intervalle $]0; \frac{1}{e}[$ est bien stable par f.

2. Si $u_0 \ge 1$, u_1 est bien définie et par décroissance de f sur $[1/e; +\infty[$,

$$u_1 = f(u_0) < f(1) = -1\ln(1) = 0$$

Puisque u_1 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f, u_2 n'est pas définie et par suite aucun des termes suivants ne l'est : la suite (u_n) n'est donc pas définie.

3. On obtient:

$$u_1 = f(u_0) = f(1/e) = 1/e = u_0$$

On en déduit par une récurrence facile que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ donc la suite (u_n) est constante égale à 1/e.

- 4. Cas $u_0 \in]0, \frac{1}{e}[:$
 - (a) Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1/e$:

- **Initialisation** : on sait par hypothèses que $0 < u_0 < 1/e$ donc la propriété est vraie au rang n = 0.
- **Hérédité**: on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $0 < u_n < 1/e$, alors en composant par f strictement croissante sur]0; 1/e[on a :

$$f(0) < f(u_n) < f(1/e)$$
 donc $0 < u_{n+1} < 1/e$

et la propriété est vraie au rang n+1.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_n < 1/e \iff u_n \in]0; 1/e[.$$

(b) Pour comparer u_0 et u_1 on cherche le signe de

$$u_0 - u_1 = u_0 - f(u_0) = u_0 + u_0 \ln(u_0) = u_0 [1 + \ln(u_0)]$$

Or on sait que $u_0 < 1/e$ donc :

$$ln(u_0) < ln(1/e) = -1$$
 et enfin $1 + ln(u_0) < 0$

donc par produit avec $u_0 > 0$ on obtient :

$$u_0 - u_1 < 0$$
 et donc $u_0 < u_1$.

Montrons alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$:

- **Initialisation** : on vient de voir que $u_0 < u_1$ donc la propriété est vraie au rang n = 0.
- **Hérédité**: on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n \leq u_{n+1}$, alors en composant par f strictement croissante sur]0; 1/e[on a :

$$f(u_n) \le f(u_{n+1})$$
 donc $u_{n+1} \le u_{n+2}$

et la propriété est vraie au rang n+1.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \le u_{n+1}$$

donc la suite (u_n) est croissante.

(c) (u_n) est croissante et majorée par 1/e donc elle converge vers une limite L et comme elle est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_0 \le u_n \le 1/e$$

donc par passage à la limite $u_0 \le L \le 1/e$.

De plus comme f est continue, la limite de (u_n) vérifie :

$$f(L) = L \iff -L \ln L = L \iff -L(\ln L + 1) = 0$$

donc L=0 ou bien

$$ln(L) + 1 = 0 \iff ln(L) = -1 \iff L = e^{-1} = 1/e$$

donc les seules limites possibles sont 0 et 1/e. Or $0 < u_0$ donc ne vérifie pas la condition précédente, donc la seule limite possible restante est 1/e, donc (u_n) converge vers 1/e.

5. D'après la décroissance stricte de f sur]1/e;1[on obtient :

$$f(1/e) > f(u_0) > f(1) \iff 1/e > u_1 > 0$$

On en déduit que la suite $(v_n)_{n\geq 0}=(u_{n+1})_{n\geq 0}$ vérifie toutes les hypothèses de la question 4, donc converge vers 1/e: par suite (u_n) converge également vers 1/e.

Exercice 7.

Etude de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + e - 1$ pour différentes valeurs de u_0 .

- 1. On introduit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x) + e 1$ et la fonction g définie par g(x) = f(x) x.
 - (a) f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de fonctions dérivables et $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*
 - (b) g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de fonctions dérivables et $g'(x) = \frac{1}{x} 1 = \frac{1-x}{x}$ On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0	α	1	e	$+\infty$
g'(x)		+	0	_	
g(x)		$-\infty$	e-2	0	$-\infty$

On remarque que $g(e) = \ln(e) + e - 1 - e = 1 + e - 1 - e = 0$ et par théorème de la bijection, e est l'unique solution de l'équation g(x) = 0 sur $[1; \infty[$.

De même, g est continue, strictement croissante et change de signe (car $e \simeq 2, 7 > 2$) sur]0;1] donc l'équation g(x) = 0 admet une unique solution notée α sur]0;1].

Du tableau de variations précédent, on obtient donc le tableau de signe :

x	0		α		e		$+\infty$
g(x)		_	0	+	0	_	

- 2. On étudie ici la suite u dans le cas où $u_0 > e$.
 - (a) D'après la question 1., f est croissante donc $f(]e; +\infty[) =] f(e); \lim_{+\infty} f[=]e; +\infty[$ donc $]e; +\infty[$ est bien un intervalle stable par f.

Etant donné que $u_0 \in]e; +\infty[$, on peut prouver par une récurrence évidente que tous les termes de la suite restent dans cet intervalle c-a-d :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]e; +\infty[$$

(b) $\bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) < 0 \text{ car } u_n > e \text{ et } g < 0 \text{ sur }]e; +\infty[, \text{ d'après la question } 1.(b)$

La suite (u_n) est donc décroissante.

- La suite (u_n) est décroissante et minorée par e donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite l.
- (c) La (u_n) converge vers un réel l, avec $l \ge e$ (par passage à la limite) et comme f est continue en l alors; par théorème du point fixe, on a :

 $f(l) = l \Leftrightarrow g(l) = 0 \Leftrightarrow l = e$ d'après le tableau de signe de g de la question 1.(b). **Conclusion :** la suite (u_n) converge donc vers e.

- 3. On étudie ici le cas où $u_0 = 1$
 - (a) \bullet Montrons que pour tout entier $n, u_n \leq e$: f est croissante donc $f([1,e]) = [e-1,e] \subset [1;e]$ donc [1;e] est un intervalle stable par f. Alors, par une récurrence évidente : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1;e]$; donc en particulier $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq e$
 - $u_{n+1} u_n = g(u_n) \ge 0$ d'après la question 1.(b) car $u_n \in [1; e] \subset [\alpha, e]$. La suite (u_n) est donc croissante : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \le u_{n+1}$.

Remarque: nous pouvions aussi démontrer l'encadrement demandé directement par récurrence.

(b) Nous venons de démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par e donc elle converge vers un réel $l \in [1; e]$ (par passage à la limite);

et comme f est continue en l alors; par théorème du point fixe, on a :

 $f(l) = l \Leftrightarrow g(l) = 0 \Leftrightarrow l = e$ d'après le tableau de signe de g de la question 1.(b).

Conclusion: la suite (u_n) converge donc vers e.

4. On étudie ici la suite u dans le cas où $0 < u_0 < \alpha$. (α défini au **1.b)**). On se propose de démontrer par l'absurde qu'à partir d'un certain rang, la suite u n'est plus définie.

On suppose pour celà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- (a) $u_1 u_0 f(u_0) u_0 = g(u_0) < 0$ d'après la question 1.(b); car $u_0 \in]0, \alpha[$. On a donc $u_1 < u_0 < \alpha$; et comme $u_1 > 0$ d'après l'hypothèse de travail alors $0 < u_1 < u_0 < \alpha$: la propriété est démontrée pour n = 0.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_{n+1} < u_n < \alpha$; on compose par f, comme f est strictement croissante, on obtient :

$$-\infty = \lim_{\Omega} f < u_{n+2} < u_{n+1} < f(\alpha) = \alpha;$$

Ce qui donne en particulier $u_{n+2} < u_{n+1} < \alpha$; et comme $u_{n+2} > 0$ d'après l'hypothèse de travail alors $0 < u_{n+2} < u_{n+1} < \alpha$.

- Conclusion : Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} < u_n < \alpha$. La suite est donc décroissante et ses termes restent dans l'intervalle $]0; \alpha[$.
- (b) Supposons que (u_n) converge vers une limite l > 0, alors $l \le \alpha$ (par passage à la limite) et comme f est continue en l alors; par théorème du point fixe, on a : $f(l) = l \Leftrightarrow g(l) = 0 \Leftrightarrow l = \alpha$ d'après le tableau de signe de g de la question 1.(b). O, ceci est absurde car (u_n) est décroissante donc $u_n \le u_0$ donc par passage à la limite

Conclusion: la suite (u_n) ne peut pas converger vers une limite strictement positive.

(c) La suite (u_n) est décroissante minorée par 0 donc elle converge vers une limite $l \in [0; \alpha]$ (par passage à la limite); or l ne peut pas être strictement positive donc l = 0.

Conclusion: la suite (u_n) converge donc vers 0.

Or ceci est impossible car $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc si $u_n \to 0$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \to -\infty \neq 0$ ce qui est impossible par unicité de la limite de (u_n) (et donc de ses sous-suites).

Conclusion : L'hypothèse de départ était fausse donc il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 0 \Leftrightarrow u_n \notin D_f$ et donc $u_{n+1} = f(u_n)$ n'existe pas : la suite n'est pas définie.

Exercice 8.

 $l \leq u_0 < \alpha$.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{5 + 4u_n}$.

- 1. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $1 \le u_n \le 5$:
 - **Initialisation**: on sait que $u_0 = 1$, il existe donc bien et se trouve entre 1 et 5.
 - **Hérédité** : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que u_n existe et $1 \le u_n \le 5$.

Alors $5 + 4u_n \ge 9 \ge 0$ donc $u_{n+1} = \sqrt{5 + 4u_n}$ existe, et de plus :

$$4 \le u_n \le 20 \Longrightarrow 9 \le 5 + 4u_n \le 25 \Longrightarrow 3 \le \sqrt{5 + 4u_n} \le 5$$

et finalement on a bien : $1 \le 3 \le u_{n+1} \le 5$, et la propriété est vraie au rang n+1.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe donc la suite (u_n) est bien définie et :

$$1 \le u_n \le 5$$
.

2. Comme u_n est compris entre 1 et 5, si elle a une limite L, celle-ci est comprise entre 1 et 5.

Comme la fonction $f(x) = \sqrt{5+4x}$ est continue, si u_n tend vers une limite L, le passage à la limite de la relation de récurrence donne :

$$f(L) = L \iff \sqrt{5+4L} = L \iff 5+4L = L^2 \iff L^2-4L-5=0.$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant et racine(s):

$$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2$$
, $L_1 = \frac{4 - 6}{2} = -1$, $L_2 = \frac{4 + 6}{2} = 5$.

On en déduit que la seule limite possible de (u_n) est L=5, car -1 n'est pas compris entre 1 et 5.

3. On reconnaît l'inégalité des accroissements finis. Comme u_n est compris entre 1 et 5, on cherche à prouver que $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ sur [1;5]:

f est bien dérivable sur cet intervalle, et de plus :

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{5+4x}} = \frac{2}{\sqrt{5+4x}}.$$

De plus pour tout $x \in [1; 5]$ on a :

$$1 \le x \le 5 \implies 4 \le 4x \le 20 \Longrightarrow 9 \le 5 + 4x \le 25 \Longrightarrow 3 \le \sqrt{5 + 4x} \le 5$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{5} \le \frac{1}{\sqrt{5 + 4x}} \le \frac{1}{3} \Longrightarrow -\frac{2}{3} \le \frac{2}{5} \le f(x) \le \frac{2}{3}$$

$$\Longrightarrow |f'(x)| \le \frac{2}{3}.$$

avec dans l'ordre : $4 \ge 0$, la fonction racine croissante sur \mathbb{R}_+ , la fonction inverse décroissante sur \mathbb{R}_+^* , et $2 \ge 0$.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et 5 sont dans l'intervalle [1; 5], on en déduit par inégalité des accroissements finis que :

$$|f(u_n) - f(5)| \le \frac{2}{3}|u_n - 5| \iff |u_{n+1} - 5| \le \frac{2}{3}|u_n - 5|$$

car $f(u_n) = u_{n+1}$ et f(5) = 5.

Montrons alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 5| \le 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$:

— **Initialisation**: pour n = 0, on a $4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 4$ et $|u_0 - 5| = |1 - 5| = |-4| = 4$ donc on a bien:

$$|u_0 - 5| \le 4\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

et la propriété est vraie au rang n = 0.

— **Hérédité** : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $|u_n - 5| \le 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$, alors comme $\frac{2}{3} \ge 0$ on a :

$$\frac{2}{3}|u_n - 5| \le 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

et par l'inégalité précédente on obtient :

$$|u_{n+1} - 5| \le \frac{2}{3}|u_n - 5| \le 4\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

et la propriété est vraie au rang n+1.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - 5| \le 4\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Enfin comme $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, on sait que $4\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc par encadrement (une valeur absolue est positive):

$$|u_n - 5| \to 0$$
 donc $u_n - 5 \to 0$ et enfin $u_n \to 5$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 9.

1. (a) f_k est dérivable sur]0;1[et $]1;+\infty[$ car $x\to \ln(x),\ x\to x^k$ et $x\to x-1$ le sont, et $x-1\neq 0$. De plus

$$f_k'(x) = \frac{\frac{k(\ln(x))^{k-1}}{x}(x-1) - (\ln(x))^k}{(x-1)^2} = \frac{\ln(x)^{k-1}}{(x-1)^2} \times \frac{k(x-1) - x\ln(x)}{x}.$$

(b) On considère le taux d'accroissement :

$$\frac{f_k(x) - f_k(1)}{x - 1} = \frac{\ln(x)^k}{(x - 1)^2}$$

qui est une forme indéterminée. On utilise le changement de variable $y=x-1 \Longleftrightarrow x=y+1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f_k(x) - f_k(1)}{x - 1} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(y + 1)^k}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{(y + o(y))^k}{y} = \lim_{y \to 0} y^{k - 1} (1 + o(1))^k = \lim_{y \to 0} y^{k - 1}$$

qui tend vers 0 pour k > 2 et vers 1 pour k = 2 donc f_k est dérivable en 1 et $f'_k(1) = 0$ pour k > 2, et $f'_2(1) = 1$.

(c) φ_k est dérivable sur \mathbb{R}^+ et

$$\varphi'_k(x) = k - \frac{x}{x} - \ln(x) = k - 1 - \ln(x)$$

qui est strictement positive avant e^{k-1} , nulle en e^{k-1} et strictement négative après, donc φ_k est strictement croissante sur $[0; e^{k-1}]$ et strictement décroissante sur $[e^{k-1}; +\infty[$.

(d) La fonction φ_k est strictement croissante sur $]1; e^{k-1}]$ donc réalise une bijection de $]1; e^{k-1}]$ dans $[\varphi_k(1); \varphi_k(e^{k-1})] =]0; e^{k-1} - k]$.

Or $0 \notin]0; e^{k-1} - k]$ (φ_k est strictement croissante sur l'intervalle donc $e^{k-1} - k > 0$), donc l'équation $\varphi_k(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $]1; e^{k-1}]$.

La fonction φ_k est strictement décroissante sur $]e^{k-1}$; $+\infty[$ donc réalise une bijection de $]e^{k-1}$; $+\infty[$ dans $\left|\lim_{x\to+\infty}\varphi_k(x);\varphi_k(e^{k-1})\right|=]-\infty; e^{k-1}-k[$ car :

$$\varphi_k(x) = kx - k - x \ln x = -x \ln x \left(1 + \frac{k}{x \ln x} - \frac{k}{\ln x} \right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

par produit, quotient et somme de limites.

Or $0 \in]0; e^{k-1} - k]$ (on a vu que $e^{k-1} - k > 0$), donc l'équation $\varphi_k(x) = 0$ une unique solution sur $]e^{k-1}; +\infty[$; cela fait donc au total une unique solution sur $]1; +\infty[$, qui est supérieure à e^{k-1} .

2. (a) On a déjà vu $e^{k-1} < a_k$.

Pour l'autre inégalité, comme a_k est implicite, on compose par φ_k :

$$\varphi_k(e^k) = k(e^k - 1) - e^k \times k = -k < 0$$
 et $\varphi_k(a_k) = 0$

donc

$$\varphi_k(e^k) < \varphi_k(a_k)$$

Or φ_k est strictement décroissante sur $[e^{k-1}; +\infty[$ donc on obtient :

$$a_k < e^k$$
 et enfin $e^{k-1} < a_k < e^k$.

Par théorème d'encadrement (ou ici de comparaison avec la seule inégalité de gauche), a_k diverge vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$.

(b) Par définition de a_k , on sait que :

$$\varphi(a_k) = 0 \iff k(a_k - 1) - a_k \ln(a_k) = 0$$

On remplace a_l par $e^k(1+b_k)$, on obtient :

$$k(e^{k}(1+b_{k})-1) = e^{k}(1+b_{k}) \times \ln\left[e^{k}(1+b_{k})\right] \quad \text{donc} \quad k(e^{k}(1+b_{k})-1) = e^{k}(1+b_{k}) \times \left[\ln(e^{k}) + \ln(1+b_{k})\right]$$

$$\text{donc} \quad k(e^{k}(1+b_{k})-1) = e^{k}(1+b_{k}) \times \left[k + \ln(1+b_{k})\right]$$

$$\text{donc} \quad ke^{k}(1+b_{k}) - ke^{k} = ke^{k}(1+b_{k}) + e^{k}(1+b_{k}) \ln(1+b_{k})$$

$$\text{donc} \quad -ke^{k} = e^{k}(1+b_{k}) \ln(1+b_{k})$$

(c) A l'aide de la question précédente, on réécrit cette inégalité sous la forme :

$$\ln(1+b_k) \ge -ke^{1-k} \Longleftrightarrow \frac{-ke^{-k}}{1+b_k} \ge -ke^{1-k} \Longleftrightarrow \frac{-k}{1+b_k} \ge -ke \Longleftrightarrow \frac{1}{1+b_k} \le e$$

en divisant par $e^{-k} > 0$ puis par -k < 0.

Or par définition de b_k on peut remplacer $1 + b_k$ par $\frac{a_k}{e^k}$ donc :

$$\ln(1+b_k) \ge -ke^{1-k} \Longleftrightarrow \frac{1}{\frac{a_k}{e^k}} \le e \Longleftrightarrow \frac{e^k}{a_k} \le e \Longleftrightarrow e^{k-1} \le a_k$$

en divisant par e > 0 et en multipliant par $a_k > 0$. Cette dernière inégalité est vraie d'après la question 2a, donc on obtient bien :

$$\ln(1+b_k) \ge -ke^{1-k}$$

On va alors chercher la limite de $ln(1 + b_k)$ par encadrement : on remarque que :

$$-ke^{1-k} = -e \times ke^{-k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

par croissances comparées ; pour avoir l'autre côté, on essaie donc de majorer $\ln(1+b_k)$ par 0 : d'après la définition de b_k :

$$\ln(1+b_k) = \ln\left(\frac{a_k}{e^k}\right) \le 0$$

car $\frac{a_k}{e^k} \leq 1$ en divisant l'inégalité de droite de la question 2a par $e^k > 0$.

On en déduit donc que

$$0 \ge \ln(1 + b_k) \ge -ke1 - k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

donc par encadrement,

$$\ln(1+b_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$
 donc $1+b_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} e^0 = 1$ donc $b_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1-1 = 0$.

Enfin pour trouver un équivalent de b_k , on revient à l'égalité de la question précédente :

$$-ke^{-k} = (1+b_k)\ln(1+b_k)$$

On vient de voir que $b_k \to 0$, donc $(1 + b_k) \to 1$ qui donne :

$$-ke^{-k} \sim \ln(1+b_k).$$

Mais comme b_k tend vers 0, on reconnaît le DL de ln : au voisinage de $+\infty$,

$$ln(1 + b_k) = b_k + o(b_k) = b_k(1 + o(1)) \sim b_k$$

et enfin on obtient bien:

$$b_k \sim -ke^{-k}$$
.

(d) Ce n'est clairement pas un DL (a_k est implicite) donc on isole le o() pour se ramener à une limite :

$$a_k = e^k - k + o(k) \iff a_k - e^k + k = o(k) \iff \frac{a_k - e^k + k}{k} \xrightarrow{k \to +\infty} 0.$$

Or $a_k - e^k = e^k b_k$, donc :

$$\frac{a_k - e^k - k}{k} = \frac{b_k e^k - k}{k} = \frac{b_k e^k}{k} - 1$$

Or on a vu que

$$b_k \sim -ke^{-k}$$
 donc $\frac{b_k e^k}{k} \sim \frac{-ke^{-k}e^k}{k} = -1$

On en déduit que

$$\frac{b_k e^k}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} -1 \quad \text{puis} \quad \frac{a_k - e^k - k}{k} = \frac{b_k e^k}{k} - 1 \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

et enfin d'après l'équivalence écrite au début de la question :

$$a_k = e^k - k + o(k).$$

Exercice 10.

On étudie la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{5}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{4}{1+u_n}$.

1. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$:

— **Initialisation** : on sait par hypothèses que $u_0 = \frac{5}{2} > 0$ donc la propriété est vraie au rang n = 0.

— **Hérédité** : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $u_n > 0$.

Alors $u_{n+1} = 1 + \frac{4}{1+u_n}$ est strictement positifs comme somme de termes strictement positifs (le second comme quotient de facteurs strictement positifs),

et la propriété est vraie au rang n+1.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n > 0$$
.

On calcule:

$$u_1 = 1 + \frac{4}{7/2} = 1 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7} = \frac{30}{14} < u_0 = \frac{5}{2} = \frac{35}{14}$$

puis

$$u_2 = 1 + \frac{4}{15/7} = 1 + \frac{28}{15} = \frac{43}{15} = \frac{86}{30} > u_0 = \frac{5}{2} = \frac{75}{30}$$

donc:

$$u_1 < u_0 < u_2$$

et la suite (u_n) n'est donc pas monotone.

2. f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = 4 \times \frac{-1}{(1+x)^2} = -\frac{4}{(1+x)^2} < 0$$

donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ , avec f(0)=5 et $\lim_{x\to +\infty}f(x)=1+0=1$ donc :

x	0	$+\infty$
f'(x)	_	
f(x)	5	1

3. Comme f est continue, les limites possibles de la suite u sont les points fixes de f: on résout donc

$$f(x) = x \Longleftrightarrow 1 + \frac{4}{1+x} = x \Longleftrightarrow \frac{1+x+4-x(1+x)}{1+x} = 0 \Longleftrightarrow 5 + x - x - x^2 = 0 \Longleftrightarrow 5 - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm \sqrt{5}.$$

Or $-\sqrt{5}$ est strictement négative, donc la seule limite possible de la suite u est $\sqrt{5}$.

4. soient v et w les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_p = u_{2p}$ et $w_p = u_{2p+1}$.

(a) On exprime d'abord v_{p+1} et w_{p+1} en fonction de v_p et w_p :

$$v_{p+1} = u_{2p+2} = f(u_{p+1}) = f[f(u_p)] = f \circ f(v_p).$$

De même,

$$w_{p+1} = u_{2p+3} = f(u_{2p+2}) = f[f(u_{2p+1})] = f \circ f(w_p).$$

La fonction g est donc définie par :

$$g(x) = f \circ f(x) = f[f(x)] = 1 + \frac{4}{1 + f(x)} = 1 + \frac{4}{1 + 1 + \frac{4}{1 + x}} = 1 + \frac{4}{\frac{2(1+x)+4}{1+x}} = 1 + 4 \times \frac{1+x}{2(1+x)+4}$$
$$= 1 + \frac{2(1+x)}{1+x+2} = 1 + \frac{2(1+x)}{3+x}.$$

(b) g est dérivable comme composée de fonctions dérivables et :

$$g'(x) = f'(x) \times f'(f(x)) > 0$$

car f'(x) < 0 et f'(f(x)) < 0 car f(x) > 0 et pour tout y > 0, f'(y) < 0. On en déduit que g est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ puis on recherche le signe de g(x) - x:

$$g(x) - x = 1 + \frac{2(1+x)}{3+x} - x = \frac{3+x+2+2x-3x-x^2}{3+x} = \frac{5-x^2}{3+x} = \frac{(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)}{3+x}.$$

Or sur \mathbb{R}_+ on obtient immédiatement 3+x>0 et $\sqrt{5}+x>0$, donc g(x)-x est du signe de $\sqrt{5}-x$:

x	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
g'(x)		+		+	
g(x)	5/3		$\sqrt{5}$		· 3
g(x)-x		+	0	_	

Enfin g est continue et strictement croissante sur $[0; \sqrt{5}]$ et sur $[\sqrt{5}; +\infty[$ donc :

$$g([0;\sqrt{5}]) = [g(0);g(\sqrt{5})] = [5/3;\sqrt{5}] \subset [0;\sqrt{5}]$$

et

$$g([\sqrt{5};+\infty[) = \left\lceil g(\sqrt{5}); \lim_{+\infty} g \right\rceil = [\sqrt{5}; 3[\subset [\sqrt{5};+\infty[$$

donc les intervalles $[0; \sqrt{5}]$ et sur $[\sqrt{5}; +\infty[$ sont bien stables par g.

(c) La suite v vérifie $v_0 = u_0 = \frac{5}{2}$, comparons le à $\sqrt{5}$:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} > = \frac{20}{4} = 5$$

donc par stricte croissance de la racine,

$$\frac{5}{2} > \sqrt{5}.$$

Comme l'intervalle $[\sqrt{5}; +\infty[$ est stable par f, on montre alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \ge \sqrt{5}$: on en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = g(v_n) - v_n \le 0$$

d'après la question b). La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par $\sqrt{5}$ donc converge; or le seul point fixe de g sur $[\sqrt{5}; +\infty[$ est $\sqrt{5}$ (les points fixes sont les solutions de g(x) - x = 0, obtenues à la question b) dans le tableau de signe de g(x) - x donc (v_n) converge vers $\sqrt{5}$.

D'autre part on a vu que $w_0 = u_1 = \frac{15}{7}$, qu'on compare à $\sqrt{5}$:

$$u_1^2 = \frac{225}{49} = <5 = \frac{49 \times 5}{49} = \frac{245}{49}$$

donc par stricte croissance de la racine,

$$0 < \frac{15}{7} < \sqrt{5}$$
.

Comme l'intervalle $[0; \sqrt{5}]$ est stable par f, on montre alors par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \le w_n \le \sqrt{5}$: on en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} - w_n = g(w_n) - w_n \ge 0$$

d'après la question b). La suite (w_n) est donc croissante et majorée par $\sqrt{5}$ donc converge; or le seul point fixe de g sur $[0;\sqrt{5}]$ est $\sqrt{5}$ (les points fixes sont les solutions de g(x)-x=0, obtenues à la question b) dans le tableau de signe de g(x)-x) donc (w_n) converge vers $\sqrt{5}$.

(d) Comme les suites (u_{2n}) (termes pairs de la suite u) et (u_{2n+1}) (termes impairs de la suite u) convergent vers la même limite, on en déduit que la suite (u_n) converge vers cette limite : (u_n) converge donc vers $\sqrt{5}$.