TD 5- Applications linéaires

Exercice 1.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (2x - y, 3x + y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est injective.
3. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 2.

1. Vérifier que la famille $((1,1),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Décomposer (x,y) dans cette base.

   On suppose qu'il existe une application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1,1) = (1,0,3)$ et $f(0,1) = (-2,-1,1)$.
2. Déterminer une base de l'image de f.
3. Calculer $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4. Déterminer la dimension du noyau de f.
5. f est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$?
6. Le vecteur $(1,1,1)$ admet-il un antécédent par f ?

Exercice 3.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM - MA$.

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de f : on en donnera une base et la dimension.
3. Déterminer l'image de f : on en donnera une base et la dimension.
4. Donner la matrice B de f dans la base canonique, justifier de plusieurs façons de f n'est pas un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et retrouver son noyau par calcul matriciel.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$, $P \mapsto (P(1), P'(1), P(0))$.

1. Calculer l'image par f de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que f est linéaire.
3. Montrer que f est un isomorphisme.
4. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P(0) = 0$ puis le déterminer.

Exercice 5.
D'après EDHEC 2011
On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E associe la fonction polynômiale Q définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = 2xP(x) - \left(x^2 - 1\right) P'(x).$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Vérifier que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\operatorname{Im} f$.
   (b) Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 6.
Soit u l'application linéaire qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(2x+1) - 2xP'(1-x)$$

1. Démontrer que u est linéaire. Dorénavant, on note f la restriction de u à $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau de f : on en donnera une base et la dimension.
4. Déterminer l'image de f : on en donnera une base et la dimension.
5. f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 7.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à (x, y, z) associe (x', y', z') où $\begin{cases} x' = x - 2y - \frac{4}{3}z \\ y' = -2x + 4y + \frac{8}{3}z \\ z' = 3x - 6y - 4z \end{cases}$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
2. On note $e_1' = (2, 1, 0)$, $e_2' = (4, 0, 3)$ et $e_3' = (1, -2, 3)$.
   Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Ecrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Utiliser A' pour :
   (a) Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.
   (b) Déterminer si $f - Id$ est un isomorphisme. Que vaut $Ker(f - Id)$, $Im(f - Id)$?
   (c) Déterminer $f \circ f$

Exercice 8.
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

1. On note $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = \vec{k}$.
   Déterminer $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$, $f(\vec{w})$.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E notée $\mathcal{B}'$. Ecrire $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
3. Ecrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
4. Rappeler l'expression reliant A, D, P et P^{-1}. Calculer A^n.
5. Justifier que f est un automorphisme de E et donner la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 9.
D'après EDHEC 1998
E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$.
Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_a(e_1) = f_a(e_3) = a\ e_1 + e_2 - a\ e_3$$

1. (a) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f_a$.
   (b) Montrer qu'une base de $\ker f_a$ est $(e_2,\ e_1 - e_3)$.
2. Ecrire la matrice A de f_a dans $\mathcal{B}$ et calculer A^2. En déduire sans calcul $f_a \circ f_a$
3. On pose $e'_1 = f_a(e_1) \quad e'_2 = e_1 - e_3 \quad e'_3 = e_3$
   (a) Montrer que $(e'_1,\ e'_2,\ e'_3)$ est une base de E.
   (b) Donner la matrice A' de f_a dans cette base.
   (c) Ecrire la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.Donner la formule reliant A, A' et P.

Exercice 10.
Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(\vec{i}) = \vec{k}$, $f(\vec{j}) = \vec{i}$ et $f(\vec{k}) = \vec{j}$.

1. Déterminer f^3. Donner un polynôme annulateur de f
2. En déduire que f est bijectif et déterminer f^{-1}.
3. Déterminer le noyau de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par $g = f - f^2$.
4. Déterminer $\operatorname{Im}(g)$.

Exercice 11.

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}};\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}$. Nous allons prouver la formule explicite des suites récurrentes vérifiant cette relation de récurrence.
Pour cela, on introduit $\phi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \to & (u_0, u_1) \end{array}$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, espace vectoriel des suites numériques.
2) Montrer que ϕ est une application linéaire. Déterminer $\ker(\phi)$.
3) Justifier que ϕ est surjective.
4) En déduire $dim(E)$.
5) Déterminer $r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$ tels que les suites (r_1^n), (r_2^n) constituent une famille libre de E. En déduire l'expression générale de u_n en fonction de n, pour $(u_n) \in E$.

Exercice 12.
On se place dans l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par :

$$\Phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

1. Montrer que Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Déterminer $\ker \Phi$. Φ est-elle injective ?
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\ker \Phi^k$.
4. Montrer que Φ est surjective.
5. En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 13.
Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et t l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}, t(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Remarque : $t(A)$ est appelée la ***trace*** *de la matrice A*

1. Calculer $t(I_n)$.
2. Montrer que t est linéaire.
3. Calculer l'image de t, et en donner une base.
4. En déduire, $dim(\ker t)$; puis déterminer une base de $\ker t$.
5. Montrer que pour tout $A \in E$, $t({}^tA) = t(A)$.
6. Montrer que, pour tout A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t(AB) = t(BA)$.
7. En déduire que deux matrices semblables ont même trace.
8. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable admettant $\lambda_1 < \lambda_2 < ...\lambda_p$ comme valeurs propres distinctes. Exprimer $t(A)$ en fonction des valeurs propres et des dimensions de sous-espaces propres de A.

Exercice 14.
Dans tout l'exercice, N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 1.

On note $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à N et du polynôme nul ; on désigne par Id l'application identique de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$.

1. Soit a un nombre réel non nul et P un élément de $\mathbb{R}_N[X]$.
   Justifier que $P(aX + 1 - a)$ (c'est-à-dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:$x \longmapsto P(ax + 1 - a)$) est un polynôme de même degré que P.

   Dans toute la suite de l'exercice, pour tout réel a non nul, on note f_a l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(ax + 1 - a)$

2. Justifier que f_a est un isomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.
3. Soient a et b des nombres réels non nuls.
   (a) Déterminer la composée $f_b \circ f_a$ de f_a par f_b.
   (b) Préciser la bijection réciproque de f_a, notée $(f_a)^{-1}$.
   (c) On pose : $(f_a)^0 = \text{Id}$ et, pour tout entier naturel n : $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n : $(f_a)^n = f_{a^n}$.
4. Pour tout réel a non nul, on note M_a la matrice de f_a dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^N)$ de $\mathbb{R}_N[X]$.
   (a) Expliciter M_a dans le cas $N = 3$.
   Dans le cas général, donner le coefficient de la $(i + 1)$-ième ligne et $(j + 1)$-ième colonne de M_a (i et j entiers compris au sens large entre 0 et N).
   (b) n désignant un entier naturel, justifier l'égalité : $(M_a)^n = M_{a^n}$.
   Ce résultat reste-t-il valable si n est un entier négatif ?
5. Préciser l'ensemble des valeurs propres de f_a .
   Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N, calculer $f_a\left((X - 1)^k\right)$.
   L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?

Exercice 15.

1. Noyaux et images itérés : Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :
   (a) $\ker u \subset \ker u^2$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ker u^n \subset \ker u^{n+1}$.
   (b) $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$, puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} u^{n+1} \subset \operatorname{Im} u^n$.

2. Soit E un espace vectoriel et f et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :
$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \subset \ker g$$

3. Soit E un espace vectoriel et f et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer :
$$\ker g \circ f = \ker f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{\vec{0}\}$$

Exercice 16.
Noyaux et images itérés (suite).
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $\ker u^{n_0+1} = \ker u^{n_0}$. Montrer que $\ker u^k = \ker u^{n_0}$ pour tout $k \geqslant n_0$.

Exercice 17.
Endomorphisme nilpotents.

1. Un exemple d'utilisation des noyaux itérés : soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, nilpotent d'indice k (i.e. il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{k-1} \neq 0$ et $u^k = 0$.).
   On souhaite prouver par l'absurde que $k \leqslant 3$.
   Pour cela, on suppose que $k > 3$:
   (a) En effectuant un raisonnement par l'absurde, prouver qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas bijectif et en déduire une propriété sur $\dim \ker u$.
   (b) Déterminer l'image et le noyau de la fonction nulle de $\mathbb{R}^3$. En déduire $dim(\ker u^k)$).
   (c) A l'aide des noyaux itérés vus à l'exercice précédent, démontrer par l'absurde que $\ker u \neq \ker u^2$ et $\ker u^2 \neq \ker u^3$.
   (d) En considérant la dimension des noyaux ci-dessus, montrer que $u^3 = 0$. Conclure.

2. Cas particulier d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, nilpotent d'indice 3 : soit u un endomorphisme nilpotent vérifiant $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.
   (a) Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \notin \ker u^2$.
   (b) Justifier que $\mathcal{B} = (x, u(x), u^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice N de u dans la base $\mathcal{B}$.
   (d) Démontrer que $\operatorname{Im}\ u^2 = \ker u$.