Correction du TD 5 : applications linéaires

Exercice 1.
Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (2x - y, 3x + y)$.

1. Montrons que f est linéaire : soient (x_1, y_1) et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et λ un réel, on a :

$$\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$$

donc

$$\begin{aligned} f[\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] &= [2(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2), 3(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2)] \\ &= [\lambda(2x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2), \lambda(3x_1 + y_1) + (3x_2 + y_2)] \\ &= \lambda(2x_1 - y_1, 3x_1 + y_1) + (2x_2 - y_2, 3x_2 + y_2) \\ &= \lambda f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

donc f est linéaire. De plus pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (2x - y, 3x + y) \in \mathbb{R}^2$$

donc f va de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même : c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

2. On cherche le noyau de f : $\operatorname{Ker} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{tq } f(x, y) = 0\}$. Résolvons cette équation :

$$f(x,y) = 0 \iff (2x-3y, 3x+y) = (0,0) \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array} \right. \iff (L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1) \left\{ \begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ 5y = 0 \end{array} \right. \iff x = y = 0$$

donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, et f est bien injective.

3. f est déjà un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, il reste donc à montrer qu'elle est bijective pour que ce soit un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Montrons que f est surjective :
Méthode 1 :
pour cela il faut prouver que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ or $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ (par définition, l'image est toujours inclus dans l'ensemble d'arrivée), donc il suffit que $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^2)$.

Or on connaît la dimension de $\operatorname{Ker} f$ (nulle car $\operatorname{Ker} f = \{0\}$) ; par théorème du rang on obtient :

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2 \quad \text{donc} \quad \dim(\operatorname{Im} f) = 2 - 0 = 2$$

On en déduit que $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, donc f est surjective et donc bijective.

Méthode 2 :
f est un <u>endomorphisme</u> de $\mathbb{R}^2$, de plus f est injective donc f est surjective (théorème 14).

Pour déterminer f^{-1}, on prend soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et on résout $f(x,y) = (a,b)$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = (a,b) \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = a \\ 3x + y = b \end{array} \right. \iff (L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1) \left\{ \begin{array}{r} 2x - y = a \\ 5y = -3a + 2b \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{r} x = \frac{y+a}{2} = \frac{\frac{2}{5}a + \frac{2}{5}b}{2} = \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b \\ \\ y = -\frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b \end{array} \right.$$

donc on obtient :

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y, \frac{2}{5}y - \frac{3}{5}x \right).$$

Exercice 2.

1. Cette famille a un cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^2$ (2) et elle est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires : c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$. De plus pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$(x,y) = a(1,1) + b(0,1) \iff \left\{ \begin{array}{r} a \quad = x \\ a + b = y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} a = x \\ b = y - x \end{array} \right.$$

donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on obtient :

$$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1).$$

2. Puisqu'on ne connaît que les images de $(1,1)$ et $(0,1)$, on décompose (x,y) sur cette base :

$$f(x,y) = f[(x(1,1) + (y-x)(0,1)]$$

Par linéarité de f on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xf(1,1) + (y-x)f(0,1) = x(1,0,3) + (y-x)(-2,-1,1) = (x,0,3x) + (-2y+2x, -y+x, y-x) \\ &= (3x-2y, x-y, 2x+y). \end{aligned}$$

3. On sait que :

$$\mathrm{Ker}(f) = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tq } f(x,y) = 0 \Big\}$$

Pour donner sa dimension, il en faut une base, donc une famille génératrice dont on testera la liberté. Il faut donc expliciter l'ensemble en résolvant :

$$f(x,y) = 0 \iff (3x-2y, x-y, 2x+y) = (0,0) \iff \left\{ \begin{array}{c} 3x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array} \right. \iff \begin{array}{c} L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} 3x - 2y = 0 \\ -y = 0 \\ 7y = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff x = y = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

donc

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$$

est de dimension 0 par définition.

4. D'après le théorème du rang on sait que :

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathbb{R}^2) \iff \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2 - 0 = 2.$$

Cherchons à présent une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$: comme on dispose des images de la base $[(1,1),(0,1)]$ on applique la propriété :

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,[f(1,1), f(0,1)] = \mathrm{Vect}[(1,0,3),(-2,-1,1)]$$

et la famille $[(1,0,3),(-2,-1,1)]$ est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$ et de cardinal 2 égal à la dimension de $\mathrm{Im}\, f$ donc c'est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

Remarque : si on n'a pas pensé à appliquer le théorème du rang pour obtenir la dimension de $\mathrm{Im}\, f$, on peut conclure que la famille est génératrice puis libre car composée de deux vecteurs non colinéaires, donc c'est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

5. Comme $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, f est injective. Par contre on a $\dim(\operatorname{Im} f) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective : elle n'est donc pas bijective.

6. $(1,1,1) \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (1,1,1)$.
On résout l'équation $f(x,y) = (1,1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y &= 1 \\ x - y &= 1 \\ 2x + y &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -1 \\ y &= -2 \\ -4 &= 1 \end{cases}$.
Le système est incompatible donc $(1,1,1)$ n'a pas d'antécédent par f.

Exercice 3.
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Soit f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui à une matrice M associe $f(M) = AM - MA$.

1. Soient M_1 et M_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} f(\lambda M_1 + M_2) &= A(\lambda M_1 + M_2) - (\lambda M_1 + M_2)A = \lambda AM_1 + AM_2 - \lambda M_1 A - M_2 A \\ &= \lambda(AM_1 - M_1 A) + AM_2 - M_2 A = \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{aligned}$$
donc f est bien linéaire.
De plus, pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, comme A est aussi dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $f(M) = AM - MA$ est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par stabilité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par somme et par produits.
L'espace de départ et d'arrivée sont les mêmes donc f est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On sait que :
$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \text{tq } f(M) = 0 \right\}$$
Pour donner sa dimension, il en faut une base, donc une famille génératrice dont on testera la liberté. Il faut donc expliciter l'ensemble en résolvant, avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:
$$\begin{aligned} f(M) = 0 &\iff AM - MA = 0 \iff \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 4c & 4d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a & 4b \\ 2c & 4d \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{matrix} 2a = 2a & 2b = 4b \\ 4c = 2c & 4d = 4d \end{matrix} \iff \begin{matrix} 0 = 0 & -2b = 0 \\ 2c = 0 & 0 = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} a = a & b = 0 \\ c = 0 & d = d \end{matrix} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
donc
$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{tq } a, d \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$
La famille $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$ est donc génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$, et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires : c'est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$, qui est de dimension 2.

3. D'après le théorème du rang, on a :
$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right) \iff \dim(\operatorname{Im} f) = 4 - 2 = 2.$$
Cherchons alors une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, et enlevons des vecteurs pour arriver à 2 : on doit calculer l'image d'une base, prenons la base canonique. Pour éviter les calculs trop lourds on considère $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on calcule
$$f(M) = AM - MA = \begin{pmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{pmatrix}$$
ce qui donne en remplaçant a, b, c et d par les bonnes valeurs à chaque fois :
$$f\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0 \ ,\ f\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,\ f\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \ ,\ f\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

et finalement :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left[0, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, 0\right] = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

La famille $\left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]$ est donc génératrice de $\operatorname{Im} f$ est à un cardinal égal à la dimension de $\operatorname{Im} f$ (2) donc c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

Remarque : si on n'a pas calculé la dimension de $\operatorname{Im} f$ par théorème du rang, on peut conclure que la famille est génératrice et libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, donc c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

4. D'après les calculs précédents :

$$Mat_{\mathcal{B}_]}(f) = B = diag(0, -2, 2, 0)$$

• Différentes justifications de " f non bijective" :
— $\ker f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective donc pas bijective .
ou
— $\operatorname{Im} f \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (car $dim(\operatorname{Im} f) = 2 \neq 4$)donc f n'est pas surjective donc pas bijective.
ou
— B est diagonale donc triangulaire avec un coefficient diagonal nul donc elle n'est pas inversible (autre justification : elle a une colonne nul donc les colonnes sont liées) donc f n'est pas bijective.
• - Calculons d'abord $\ker B$:

On résout l'équation $BX = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ on trouve : $x = x$; $y = 0$; $z = 0$; $t = t$ i.e.

$X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\ker B = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\ker f = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 4.
Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$, $P \mapsto (P(1), P'(1), P(0))$.

1. Soit (e_0, e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ c'est-à-dire les polynômes définis par $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
$f(e_0) = (e_0(1), e_0'(1), e_0(0)) = (1, 0, 1)$; $f(e_1) = (e_1(1), e_1'(1), e_1(0)) = (1, 1, 0)$ et $f(e_2) = (e_2(1), e_2'(1), e_2(0)) = (1, 2, 0)$.
2. Soient P_1 et P_2 deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P_1 + P_2) &= \Big([\lambda P_1 + P_2](1), [\lambda P_1 + P_2]'(1), [\lambda P_1 + P_2](0)\Big) = \Big(\lambda P_1(1) + P_2(1), \lambda P_1'(1) + P_2'(1), \lambda P_1(0) + P_2(0) \\ &= \lambda(P_1(1), P_1'(1), P_1(0)) + (P_2(1), P_2'(1), P_2(0)) = \lambda f(P_1) + f(P_2) \end{aligned}$$

donc f est bien linéaire.

3. On montre d'abord que f est injective, en déterminant son noyau : soit $P = ae_0 + be_1 + ce_2$ donc tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $P(x) = a + bx + cx^2$, alors $P'(x) = b + 2cx$ on a :

$$f(P) = 0 \iff (a + b + c, b + 2c, a) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a = 0 \end{cases} \iff L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \begin{cases} b + c = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = b = c = 0 \iff P = 0.$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et donc que f est injective.

Montrons que f est surjective :
Méthode 1 :
Par théorème du rang on obtient alors :

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right) \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = 3 - 0 = 3.$$

On remarque alors que $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathbb{R}^3)$ et comme $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ alors $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Donc f est surjective et finalement elle est bien bijective.
Méthode 2 :
On a :
• $dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ et :
• f est injective :
donc f est surjective (thm 14).

4. f étant bijective, le triplet $(1, 1, 0)$ admet un unique antécédent par f i.e. il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $(P(1), P'(1), P(0)) = (1, 1, 0)$.
Pour déterminer P, soit un pose $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c les inconnues et on résout le système $\begin{cases} P(1) & = & 1 \\ P'(1) & = & 1 \\ P(0) & = & 0 \end{cases}$;
ou bien, plus astucieux, il est inutile de résoudre l'équation car on sait déjà qu'il n'y a qu'une seule solution, il suffit de trouver une seule solution (de tête) et c'est réglé.
On remarque que le polynôme $P(X) = X$ convient, donc c'est l'unique solution de l'équation.

Exercice 5.
D'après EDHEC 2011
On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E associe la fonction polynômiale Q définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = 2xP(x) - \left(x^2 - 1\right) P'(x).$$

1. (a) Soient P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$ et λ un réel, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(\lambda P+Q)(x) = 2x(\lambda P+Q)(x)-(x^2-1)(\lambda P+Q)'(x) = 2x[\lambda P(x)+Q(x)]-(x^2-1)[\lambda P'(x)+Q'(x)]$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(\lambda P+Q)(x) = \lambda[2xP(x)-(x^2-1)P'(x)]+2xQ(x)-(x^2-1)Q'(x) = \lambda f(P)(x)+f(Q)(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(\lambda P + Q)(x) = [\lambda f(P) + f(Q)](x)$$

donc $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.

On en déduit que f est bien linéaire.

(b) Soit P un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a + bx + cx^2$ et on a :

$$f(P)(x) = 2x(a+bx+cx^2)-(x^2-1)(b+2cx) = 2ax+2bx^2+2cx^3-bx^2-2cx^3+b+2cx = bx^2+(2a+2c)x+b$$

donc $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

f est donc une application linéaire de E dans E : c'est un endomorphisme de E.

(c) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(e_0)(x) = 2x - (x^2-1)\times 0 = 2x = 2e_1(x)$ donc $f(e_0) = 2e_1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(e_1)(x) = 2x^2 - (x^2-1)\times 1 = x^2+1 = e_2(x) + e_0(x)$ donc $f(e_1) = e_2 + e_0$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(e_2)(x) = 2x^3 - (x^2-1)\times 2x = 2x^3 - 2x^3 + 2x = 2e_1(x)$ donc $f(e_2) = 2e_1$.

D'où :

$$A = Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) On sait que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,[f(e_0), f(e_1), f(e_2)]$$

donc

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,[2e_1, e_0+e_2, 2e_1] = \mathrm{Vect}(2e_1, e_0+e_2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_0+e_2)$$

On peut aussi effectuer les opérations sur les colonnes de la matrice A pour en déduire le résultat sur $\mathrm{Im}\, f$, mais il faut forcément conclure sur une écriture avec des polynômes.

La famille (e_0+e_2, e_1) est génératrice de $\mathrm{Im}\, f$, et elle est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires (on peut aussi le vérifier en posant $a(e_0+e_2) + be_1 = 0$ qui donne $a = b = 0$.)

C'est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$, elle a deux vecteurs donc dim $(\mathrm{Im}\, f) = 2$.

(b) Le théorème du rang donne $\dim \ker f = 1$. Déterminons explicitement le noyau :
Méthode 1 : en utilisant f :
Soit $P(x) = a + bx + cx^2$, alors :

$$P \in \ker f \iff f(P) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ bx^2 + (2a+2c)x + b = 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} b = 0 \\ 2a+2c = 0 \\ b = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} b = 0 \\ c = -a \end{array} \right.$$

$$P \in \ker f \iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a - ax^2 = a(1-x^2) \iff P = a(e_0 - e_2)$$

donc $\ker f = \mathrm{Vect}(e_0 - e_2)$ et $(e_0 - e_2)$ est une famille génératrice de $\ker f$, et libre car elle admet un unique vecteur, non nul donc c'est une base de $\ker f$.
On retrouve bien dim $(\ker f) = 1$.

Méthode 2 : en utilisant A :
$f(P) = 0 \Leftrightarrow AX = 0$, où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ inconnue,

$$AX = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = 0 \\ 2a+2c = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = 0 \\ c = -a \\ a = a \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

donc

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}[e_0 - e_2].$$

Exercice 6.
Soit u l'application linéaire qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = P(2x+1) - xP'(1-x)$$

1. Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et λ un réel, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(\lambda P_1 + P_2)(x) &= \lambda P_1(2x+1) + P_2(2x+1) - 2x\left[\lambda P_1'(1-x) + P_2'(1-x)\right] \\ &= \lambda\left[P_1(2x+1) - 2xP_1'(1-x)\right] + \left[P_2(2x+1) - 2xP_2'(1-x)\right] \\ &= \lambda u(P_1)(x) + u(P_2)(x). \end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a donc :

$$u(\lambda P_1 + P_2) = \lambda u(P_1) + u(P_2)$$

et enfin u est bien une application linéaire.

2. Première méthode :
Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on a $\deg P \leq 2$ donc $\deg(P(2x+1)) = \deg(P) \leq 2$.
De plus $\deg P' \leq 1$ puis $\deg(P'(1-x)) \leq 1$ et $\deg x = 1$ donc $\deg xP'(1-x) = \deg x + \deg(P'(1-x)) \leq 1 + 1 = 2$.
$f(P)$ est donc un polynôme de degré inférieur à deux comme somme de deux polynôme de degré inférieurs ou égaux à 2, et f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même : c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Deuxième méthode :
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$, alors il existe des constantes telles que $P = ae_2 + be_1 + ce_0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$.
D'où on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 2ax + b$ puis :

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= a(2x+1)^2 + b(2x+1) + c - 2x[2a(1-x) + b] = a(4x^2 + 4x + 1) + 2bx + b + c - 2x(2a - 2ax + b) \\ &= x^2(4a + 4a) + x(4a + 2b - 4a - 2b) + (a + b + c) \end{aligned}$$

On voit donc que $f(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, et on conclut de la même manière.

3. On prend un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$, qui s'écrit $P = ae_2 + be_1 + ce_0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$.
On a $P'(x) = 2ax + b$ puis :

$$\begin{aligned} f(P) = 0 &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(P)(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ a(2x+1)^2 + b(2x+1) + c - 2x\left[2a(1-x) + b\right] = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ a(4x^2 + 4x + 1) + 2bx + b + c - 2x\left[2a - 2ax + b\right] = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (4a + 4a)x^2 + (4a + 2b - 4a - 2b)x + (a + b + c) = 0. \\ &\iff \left\{\begin{array}{c} 8a = 0 \\ 0 = 0 \\ a + b + c = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = 0 \\ b = -c \end{array}\right. \\ &\iff P = -ce_1 + ce_0 = c(e_0 - e_1) \end{aligned}$$

On obtient donc $\ker f = \mathrm{Vect}[e_0 - e_1]$, qui est de dimension 1.

En effet, la famille $(e_0 - e_1)$ est génératrice de $\ker f$ et libre car elle a un seul vecteur non nul donc c'est une base de $\ker f$.

enfin le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Im}\, f = 3 - 1 = 2$.

4. Par définition de l'image, on sait que :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(P),\ \text{tq } P \in \mathbb{R}_2[X]\}$$

On a vu plus tôt que si $P = ae_2 + be_1 + ce_0$, alors $f(P)(x) = 8aax^2 + a + b + c$ donc $f(P) = 8ae_2 + (a + b + c)e_0$ donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, f &= \{8ae_2 + (a+b+c)e_0,\ \text{tq } a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{a(8e_2 + e_0) + be_0 + ce_0,\ \text{tq } a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}[8e_2 + e_0, e_0, e_0] = \mathrm{Vect}[8e_2 + e_0, e_0] \end{aligned}$$

La famille $(8e_2 + e_0, e_0)$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}\, f$ et libre car elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires : c'est donc une base de $\mathrm{Im}\, u$.

5. u n'est ni injective ni surjective : ce n'est pas un automorphisme.

Exercice 7.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui à (x, y, z) associe (x', y', z') où $\begin{cases} x' = x - 2y - \frac{4}{3}z \\ y' = -2x + 4y + \frac{8}{3}z \\ z' = 3x - 6y - 4z \end{cases}$

1. On détermine les images de la base canonique, qu'on écrit comme combinaison linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}$:
$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, -2, 3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3$$
$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (-2, 4, -6) = -2e_1 + 4e_2 - 6e_3$$
et enfin
$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-4/3, 8/3, -4) = -\frac{4}{3}e_1 + \frac{8}{3}e_2 - 4e_3$$
donc
$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4/3 \\ -2 & 4 & 8/3 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. La famille $\mathcal{B}'$ a un cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$ (3) donc il suffit de prouver qu'elle est libre. On résout :
$$ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0 \iff \begin{cases} 2a + 4b + c = 0 \\ a \quad - 2c = 0 \\ 3b + 3c = 0 \end{cases} \iff L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \begin{cases} 2a + 4b + c = 0 \\ -4b - 5c = 0 \\ 3b + 3c = 0 \end{cases}$$
$$\iff L_3 \leftarrow 4L_3 + 3L_2 \begin{cases} 2a + 4b + c = 0 \\ -4b - 5c = 0 \\ -3c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$
donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre et a le bon cardinal, c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On calcule les images de chaque vecteur de $\mathcal{B}'$ et on les écrit comme combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{B}'$:
$$f(e'_1) = f(2, 1, 0) = (0, 0, 0) = 0e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3$$
puis
$$f(e'_2) = f(4, 0, 3) = (0, 0, 0) = 0e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3$$
et enfin
$$f(e'_3) = f(1, -2, 3) = (1, -2, 3) = 0e'_1 + 0e'_2 + 1e'_3$$
donc
$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (a) On commence par chercher $\operatorname{Ker} A'$ et on lit les résultats dans la base $\mathcal{B}'$ pour conclure : soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :
$$A'X = 0 \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
On en déduit que
$$\operatorname{Ker} A' = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$
donc
$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}[e'_1, e'_2] = \operatorname{Vect}[(2, 1, 0), (4, 0, 3)].$$
D'autre part on lit sur les colonnes de A' les images de la base $\mathcal{B}'$ par f et on obtient :
$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}[f(e'_1), f(e'_2), f(e'_3)] = \operatorname{Vect}[0, 0, e'_3] = \operatorname{Vect}[e'_3] = \operatorname{Vect}[(1, -2, 3)].$$

(b) On remarque que la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de $f - \mathrm{Id}$ est :

$$B' = A' - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible (diagonale avec un coefficient nul sur sa diagonale) donc $f - \mathrm{Id}$ n'est pas bijective, donc ce n'est pas un isomorphisme.

De même qu'à la question précédente on remarque alors que :

$$B'X = 0 \iff \begin{cases} -x = 0 \\ -y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ker}\, B' = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

donc

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}[e_3'] = \mathrm{Vect}[(1, -2, 3)] = \mathrm{Im}(f).$$

D'autre part on lit sur les colonnes de B' les images de la base $\mathcal{B}'$ par $f - \mathrm{Id}$ et on obtient :

$\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}[(f - \mathrm{Id})(e_1'), (f - \mathrm{Id})(e_2'), (f - \mathrm{Id})(e_3')] = \mathrm{Vect}[-e_1', -e_2', 0]\, \mathrm{Vect}[e_1', e_2'] = \mathrm{Vect}[(2, 1, 0), (4, 0, 3)] = \mathrm{I}$

(c) On calcule la matrice de $f \circ f$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f \circ f) = Mat_{\mathcal{B}'}(f) Mat_{\mathcal{B}'}(f) = (A')^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$$

donc on en déduit que $f \circ f = f$.

Exercice 8.
Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.

1. On utilise les matrices dans la base $\mathcal{B}$:

$$Mat_{\mathcal{B}}(f(\vec{u})) = Mat_{\mathcal{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -Mat_{\mathcal{B}}(\vec{u})$$

donc $f(\vec{u}) = -\vec{u}$. De même :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f(\vec{v})) = Mat_{\mathcal{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2Mat_{\mathcal{B}}(\vec{v})$$

donc $f(\vec{v}) = 2\vec{v}$.

Enfin comme $\vec{w} = \vec{k}$ on lit directement sur la matrice A :

$$f(\vec{w}) = f(\vec{k}) = 5\vec{k} = 5\vec{w}.$$

2. Le cardinal de la famille est égal à la dimension de E (3) donc il suffit de prouver sa liberté. On résout donc :

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0 \iff \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a - b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \iff L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \begin{cases} 2a + b = 0 \\ -b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0$$

donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre et a le bon cardinal, c'est bien une base de E. Enfin d'après la définition des vecteurs de $\mathcal{B}'$ on a immédiatement :

$$P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. D'après la question 2 on a immédiatement :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4. D'après la formule de changement de base, on obtient :

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = PDP^{-1}.$$

Par une récurrence très classique on en déduit alors que

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

5. La matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$ est inversible car diagonale sans 0 sur la diagonale, donc f est bijective. Or c'est un endomorphisme par hypothèses de l'énoncé, donc un automorphisme.

Enfin on sait que la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de f^{-1} est l'inverse de celle de f donc :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1}$$

Comme on dispose d'une matrice semblable à A plus simple, on s'en sert pour calculer A^{-1} :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

et il reste à calculer P^{-1} et D^{-1} (la première par méthode de Gauss, la seconde en inversant les coefficients de la diagonale puisqu'elle est diagonale) pour conclure.

Exercice 9.
D'après EDHEC 1998
E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$.
Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_a(e_1) = f_a(e_3) = a\ e_1 + e_2 - a\ e_3$$

1. (a) On a les images de la base $\mathcal{B}$, on peut donc écrire :

$$\mathrm{Im}(f_a) = \mathrm{Vect}\,[f_a(e_1), f_a(e_2), f_a(e_3)] = \mathrm{Vect}[ae_1 + e_2 - a_3, 0, ae_1 + e_2 - a_3] = \mathrm{Vect}[ae_1 + e_2 - a_3]$$

La famille $(ae_1 + e_2 - a_3)$ est donc génératrice de $\mathrm{Im}(f_a)$ et libre car constituée d'un seul vecteur qui est non nul, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.

(b) On en déduit que $\dim(\mathrm{Im}\, f_a) = 1$, donc par théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}\, f_a) = 2$. L'énoncé nous donne la solution, on peut alors écrire :

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1 - e_3) = f_a(e_1) - f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - a_3 - (ae_1 + e_2 - a_3) = 0$$

donc $e_2 \in \ker(f_a)$ et $e_1 - e_3 \in \ker(f_a)$.

La famille $[e_2, e_1 - e_3]$ est donc une famille de $\mathrm{Ker}\, f$, libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires, et dont le cardinal est égal à la dimension de $\ker(f_a)$ (2) : c'est donc une base de $\ker(f_a)$.

2. Les coordonnées des images dans la base $\mathcal{B}$ sont directement lisibles et on a :

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \text{ et } A_a^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} = 0 = Mat_{\mathcal{B}}(f_a \circ f_a)$$

On en déduit que $f_a \circ f_a = 0$.

3. (a) Comme $\mathcal{B}'$ comprend 3 vecteurs, il suffit de montrer qu'elle forme une famille libre : on résout :

$$xe_1'+ye_2'+ze_3' = 0 \Longleftrightarrow x(ae_1+e_2-ae_3)+y(e_1-e_3)+ze_3 = 0 \Longleftrightarrow (xa+y)e_1+xe_2+(-ax-y+z)e_3 = 0$$

Comme (e_1, e_2, e_3) est libre, on peut identifier :

$$xu_1 + ye_2 + ze_3 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} ax + y = 0 \\ x = 0 \\ -ax - y + z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

donc la famille $\mathcal{B}'$ est bien libre et a le bon cardinal donc c'est une base de E.

(b) On pourrait appliquer la formule de changement de base, mais il est plus rapide de calculer les images des vecteurs de la base :
On peut passer par les coordonnées de e_1' : $(a, 1, -a)$ dans $\mathcal{B}$, son image a pour coordonnées :

$$A_a \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} = 0$$

donc $f_a(e_1') = 0$.

Ou bien on peut directement utiliser la linéarité de f_a :

$$f_a(e_1') = f_a(ae_1 + e_2 - ae_3) = af_a(e_1) + f_a(e_2) - af_a(e_3) = 0$$

De plus

$$f_a(e_1 - e_3) = f_a(e_1) - f_a(e_3) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3 = e_1'$$

(on vérifiera qu'on trouve bien les mêmes résultats par calcul matriciel)

d'où les coordonénes es images dans la base $\mathcal{B}'$ et la matrice de f_a dans cette base :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Les coordonnées de e_1' dans la base $\mathcal{B}$ sont directement lisibles et on obtient :

$$P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin par formule de changement de base on obtient :

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f_a) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(f_a) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = PA'P^{-1}.$$

Exercice 10.
Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(\vec{i}) = \vec{k}$, $f(\vec{j}) = \vec{i}$ et $f(\vec{k}) = \vec{j}$.

1. On détermine la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de f : on a directement les décompositions des vecteurs de la base dans l'énoncé :
$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On calcule ensuite
$$A^3 = Mat_{\mathcal{B}}(f^3) = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = Mat_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$$
donc on en déduit que $f^3 = \mathrm{id}$. De plus on obtient alors que
$$f^3 - \mathrm{id} = 0$$
donc le polynôme $P(x) = x^3 - 1$ est annulateur de f.

2. On en déduit également que
$$f \circ f^2 = \mathrm{id}$$
donc f est bijectif et $f^{-1} = f^2$.

3. On passe par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$:
$$C = Mat_{\mathcal{B}}(g) = Mat_{\mathcal{B}}(f - f^2) = Mat_{\mathcal{B}}(f) - Mat_{\mathcal{B}}(f^2) = A - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
puis on résout :
$$C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y - z & = & 0 \\ -x \quad + z & = & 0 \\ x - y \quad & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = y = z \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc on en déduit que :
$$\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Vect}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

4. $\mathrm{Ker}\, g$ est engendré par une famille composée d'un seul vecteur non nul donc libre, c'est une base de $\mathrm{Ker}\, g$ qui est donc de dimension 1. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}\, g) = 3$.

   On sait de plus qu'on a la propriété (où on récupère les images dans la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$) :
$$\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}[g(\vec{i}), g(\vec{j}), g(\vec{j})] = \mathrm{Vect}(-\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{k}, -\vec{i} + \vec{j})$$
   On sait qu'il ne faut que deux vecteurs : on remarque alors que
$$-\vec{i} + \vec{j} = -(\vec{i} - \vec{k}) - (-\vec{j} + \vec{k})$$
   donc on peut enlever le troisième vecteur :
$$\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}(-\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{k}).$$

Exercice 11.

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}};\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}$ et $\phi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \to & (u_0, u_1) \end{array}$.

1. L'ensemble E est défini implicitement, on utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels :
   — $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est un espace vectoriel.
   — La suite nulle, $u = 0$, vérifie $u_n = 0$ pour tout n, donc pour tout n on a :
   $$u_{n+2} = 0 \quad \text{et} \quad 2u_{n+1} + 3u_n = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$$
   donc $u_{n+2} = 2e_{n+1} + 3u_n$ pour tout n, et $u = 0$ est bien élément de E.
   — Soient u et v deux suites quelconques de E, et λ un réel. Montrons que la suite $(\lambda u + v)$ est élément de E :

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned}(\lambda u + v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(2u_{n+1} + 3u_n) + (2v_{n+1} + 3v_n) = 2(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + 3(\lambda u_{n+1} + v_n) \\ &= 2(\lambda u + v)_{n+1} + 3(\lambda u + v)_n\end{aligned}$$
   donc $(\lambda u + v) \in E$.
   Enfin on en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Soient u et v deux suites quelconques de E, on a :
   $$\phi(\lambda u + v) = ((\lambda u + v)_0, (\lambda u + v)_1) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1 = \lambda(u_0, u_1) + (v_0, v_1) = \lambda\phi(u) + \phi(v)$$
   donc ϕ est linéaire. Déterminons son noyau :
   $$u \in \ker\phi \Longleftrightarrow u_0 = u_1 = 0$$
   On prouve alors par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$:
   — **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et pour $n = 1$, $u_1 = 0$. Donc la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.
   — **Hérédité** : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ et $u_{n+1} = 0$, alors :
   $$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$$
   donc la propriété est vraie au rang $n + 2$.
   — **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.
   On en déduit que la seule suite appartenant au noyau de ϕ est la suite nulle : $\ker(\phi) = \{0\}$.
3. Par définition $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}^2$, et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la suite définie par :
   $$\left\{\begin{array}{c} u_0 = a \ \ , \ \ u_1 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n \end{array}\right.$$
   est bien définie et appartient clairement à E, donc $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Im}\,\phi$, et enfin on obtient bien :
   $$\mathrm{Im}(\phi) = \mathbb{R}^2.$$
   On en déduit que ϕ est surjective.
4. ϕ est donc bijective et linéaire, c'est un isomorphisme.
   Or d'après le cours, si ϕ est un isomorphisme alors les espace de départ et d'arrivée ont forcément même dimension, donc :
   $$dim(E) = dim(\mathbb{R}^2) = 2$$
5. Soit r un réel, on considère la suite $u_n = r^n$. Vérifions si elle appartient à E :
   $$u \in E \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} = 2r^{n+1} - 3r^n \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ r^n(r^2 - 2r - 3) = 0$$
   Ce produit ne peut être nul que si $r^n = 0$ ou $r^2 - 2r - 3 = 0$. Or r^n ne peut être nul pour tout n puisque $r^0 = 1$, donc on obtient :
   $$u \in E \Longleftrightarrow r^2 - 2r - 3 = 0$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 4+12 = 16 > 0$, donc deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Vérifions alors que la famille (u, v) est libre, avec $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 3^n$:

$$au + bv = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ au_n + bv_n = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a(-1)^n + b \times 3^n = 0$$

Comme on n'a que deux inconnues, on obtient deux équations avec les deux premières valeurs de n (0 puis 1) (attention, ce n'est plus une équivalence mais une implication) :

$$au + bv = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \times 1 + n \times 1 = 0 \\ a \times (-1) + b \times 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow a = b = 0$$

après une résolution facile, et on en déduit que la famille (u, v) est libre.

Donc (u, v) est libre et $\text{Card}(u, v) = \dim(E)$: c'est une base de E.

Enfin on en déduit que pour toute suite $w \in E$, il existe des constantes a et b telles que

$$w = au + bv \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = a(-1)^n + b \times 3^n.$$

Exercice 12.

1. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et soit λ un réel :
   $\Phi((\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \lambda\Phi(u) + \Phi(v)$.
   Donc Φ est linéaire et va de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Résolvons l'équation $\Phi(u) = 0$ d'inconnue $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   $\Phi(u) = 0 \Leftrightarrow (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0$.
   $\ker\Phi = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 0\} = Vect(v)$ où v est la suite définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 0$.
   v n'est pas la suite nulle donc $dim(\ker\Phi) = 1$ et Φ n'est pas injective.

3. $\Phi^k((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \Phi \circ \Phi \circ ... \circ \Phi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = ((u_{n+k})_{n\in\mathbb{N}})$.
   Ainsi, $u \in \ker\Phi$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = 0$ i.e. $\forall n \geq k$, $u_n = 0$

   $$\ker\Phi^k = \{(u_0, u_1, u_2, ..., u_{k-1}, 0, 0, 0, ...)|u_0, u_1, .., u_k \in \mathbb{R}\} = Vect(v0, v1, v2, ..., v(k-1))$$

   où, quelque soit $i \in [\![1; k]\!]$, vi est la suite définie par $vi_i = 1$ et $\forall n \neq i$, $vi_n = 0$.

4. Quelque soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si on pose la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_{n-1}$ alors on remarque que $\Phi((u_n)) = (v_n)$.
   Ainsi, toute suite (v_n) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ admet au moins un antécédent par Φ donc Φ est surjective.

5. Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ surjectif. Raisonnons par l'absurde :
   Si $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ était de dimension finie alors il serait aussi injectif par théorème du rang.
   Or on a vu qu'il est surjectif mais non injectif : contradiction .
   Conclusion : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.

Exercice 13.

Exercice : introduction au calcul matriciel

On remarque, en écrivant la matrice A que $t(A)$ est la somme des ses coefficients diagonaux.

1. $t(I_n) = n$

2. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$,
$t(\lambda A + B) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda A + B)_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i,} + b_{i,i}) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,i}$ (par linéarité de la somme) $=$ $\lambda t(A) + t(B)$.
donc t est linéaire .

3. On remarque que $\operatorname{Im} t \subset \mathbb{R}$ donc $dim(\operatorname{Im} t) = 0$ ou $dim(\operatorname{Im} t) = 1$. Or $n \in \operatorname{Im} t$ donc $\operatorname{Im} t \neq \{0\}$ donc $dim(\operatorname{Im} t) = 1$ et comme $\operatorname{Im} t \subset \mathbb{R}$ alors $\operatorname{Im} t = \mathbb{R}$.
Une base de $\operatorname{Im} t$ est le nombre 1.

4. Par théorème du rang $dim(\ker t) = dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - dim(\operatorname{Im} t) = n^2 - 1$.
On résout l'équation $t(A) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} = 0 \Leftrightarrow a_{n,n} = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{i,i}$.
$$\ker t = \{(a_{i,j}) \mid a_{n,n} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i}\} = Vect((M_1, M_2, ..., M_{n-1}) \cup (E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j})$$
Où $\forall i \in [\![1; n-1]\!]$, M_i est la matrice diagonale ayant un 1 sur le i-ième coefficient de la diagonale et un -1 sur son dernier coefficient, et nulle ailleurs, et pour tout $i \neq j$, $E_{i,j}$ est la matrice nulle sauf le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui vaut 1.
La famille obtenue est une famille de $n - 1 + n^2 - n = n^2 - 1$ vecteurs, génératrice d'un espace de dimension $n^2 - 1$ donc c'est une base de cet espace.

5. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on sait que ${}^tA$ est, par définition, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq n, ({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}$.
Ainsi, un matrice et sa transposée ont mêmes coefficients diagonaux donc :
$$t({}^tA) = \sum_{i=1}^{n} {}^tA_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = t(A)$$

6. $t(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k}$ (en échangeant les sommes : valide car indice
$\sum\limits_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} = t(BA)$.

7. Soient A et B deux matrices semblables alors il existe P inversible telle que $B = PAP^{-1}$.
Ainsi, $t(B) = t(PAP^{-1}) = t((PA)P^{-1}) = t(P^{-1}(PA))$ (d'après la propriété ci-dessus) $= t(P^{-1}PA) = t(IA) = t(A)$.
Deux matrices semblables ont donc même trace.

8. A est diagonalisable donc elle est semblable à une matrice diagonale.
Plus exactement, si on rassemble une base de E_{λ_1}, une base de E_{λ_2}, ...,et une base de E_{λ_p}, la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à A dans cette nouvelle base adaptée est :
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & .... & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & .. & .... \\ 0 & ... & 0 & \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & \lambda_2 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & .. & .... \\ ... & ... & ... & ... & ... & .. & .... \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$
Or deux matrices semablables ont même trace donc $t(A) = t(D) = \underbrace{\lambda_1 + \lambda_1 + ...\lambda_1}_{\dim(E_{\lambda_1}) fois} + \underbrace{\lambda_2 + \lambda_2 + ...\lambda_2}_{\dim(E_{\lambda_2}) fois} +$
$... + \underbrace{\lambda_p + \lambda_p + ...\lambda_p}_{\dim(E_{\lambda_p}) fois} = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) \times \lambda_i$.

Exercice 14.

1. Il faut connaître (et surtout comprendre) les propriétés suivantes sur les degrés des polynômes :
   — $\boxed{deg(P+Q) \leq \max(deg(P), deg(Q)) \text{ et si } deg(p) \neq deg(Q) \text{ alors } deg(P+Q) = \max(deg(P), deg(Q))}$
   — $\boxed{deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)}$
   — $\boxed{deg(P \circ Q) = deg(P) \times deg(Q)}$.
   Ici, on remarque que $P(aX+1-a)$ est de la forme $P \circ Q$ où $Q(X) = aX+1-a$ donc $deg\left(P(aX+1-a)\right) = deg(P) \times deg(Q) = deg(P) \times 1 = deg(P)$.

2. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_N[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f_a(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(aX+1-a) = \lambda P(aX+1-a) + Q(aX+1-a) = \lambda f_a(P) + f_a(Q)$$

   f_a est donc bien linéaire .

   De plus, l'équation $f_a(P) = 0$ admet pour unique solution $P = 0$. En effet, $deg(P) = deg(f_a(P))$ d'après la question 1., donc $deg(P) = deg(0) = -\infty$ donc $P = 0$.
   On a donc $\ker f_a = \{0\}$ i.e. f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$ injectif donc bijectif.

3. (a) $\forall P \in \mathbb{R}_N[X]$, $f_b \circ f_a(P) = f_b(P(aX+1-a)) = P(a(bX+1-b)+1-a) = P(abX+1-ab) = f_{ab}(P)$.
   Ainsi, $\boxed{f_b \circ f_a = f_{ab}}$

   (b) On remarque que $\forall P \in \mathbb{R}_N[X]$, $f_1(P) = P$ i.e. $f_1 = \text{Id}$.
   Vérifions alors s'il n'existe pas une fonction g de la forme f_b (avec b inconnu réel) tel que $f_a \circ g = g \circ f_a = Id = f_1$.
   D'après la question précédente, on obtient l'équation $f_{ab} = f_1$.
   Il suffit donc de trouver b tel que $ab = 1$ i.e. $b = \frac{1}{a}$.
   ainsi, $\boxed{f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}}$.

   (c) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété "$(f_a)^n = f_{a^n}$".
   • **initialisation :** $f_{a^0} = f_1 = \text{Id}$ d'après la question précédente, donc on a bien : $f_{a^0} = (f_a)^0$.
   • **Hérédité :** supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f_a)^n = f_{a^n}$.
   Alors $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a = \underbrace{f_{a^n} \circ f_a}_{(H.R.)} = \underbrace{f_{a^n \times a}}_{\text{(d'après 3.(a))}} = f_{a^{n+1}}$.

4. (a) • On a $f_a(1) = 1$, $f_a(X) = aX+1-a$, $f_a(X^2) = (aX+1-a)^2 = a^2X^2 + 2a(1-a)X + (1-a)^2$ et $f_a(X^3) = (aX+1-a)^3 = a^3X^3 + 3a^2(1-a)X^2 + 3a(1-a)^2X + (1-a)^3$.
   ainsi,

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & (1-a)^2 & (1-a)^3 \\ 0 & a & 2a(1-a) & 3a(1-a)^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2(1-a) \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

   • La $j+1-$ième colonne de M_a contient les coordonnées de $f_a(X^j)$ dans la base canonique.
   On $f_a(X^j) = (aX+1-a)^j = \underbrace{\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a^i (1-a)^{j-i} X^i}_{\text{(formule du binôme)}}$
   La $(i+1)-$ième ligne de M_a contient donc le coefficient $\binom{j}{i} a^i (1-a)^{j-i}$.

   (b) On sait d'après la question 3.(c) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_a)^n = f_{a^n}$. Donc $Mat_{B_c}((f_a)^n) = Mat_{B_c}(f_{a^n})$ i.e. $(M_a)^n = M_{a^n}$.

   Montrons maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(M_a)^n$ est inversible d'inverse $(M_a)^{-n} = M_{a^{-n}}$:

$$(M_a)^n \times M_{a^{-n}} = M_{a^n} \times M_{a^{-n}} = \underbrace{M_{a^n \times a^{-n}}}_{\text{(d'après 3.(a))}} = M_1 = I$$

   Ainsi, on a bien $(M_a)^n$ inversible et $(M_a)^{-n} = M_{a^{-n}}$.
   La formule est aussi vraie pour les entiers négatifs.

5. La matrice M_a de f_a dans la base canonique est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux i.e. $\forall i \in [\![0, N]\!]$, $\binom{i}{i} a^i (1-a)^{i-i} = a^i$.

   $f_a((X-1)^k) = (aX + 1 - a - 1)^k = (a(X-1))^k = a^k (X-1)^k$.
   On remarque que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $P_k(X) = (X-1)^k$ est un vecteur propre associé à la valeur propre a^k.
   Or la famille $\mathcal{F} = (P_0, P_1, ..., P_N)$ est libre car c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés et $card(\mathcal{F}) = N + 1 = \dim \mathbb{R}_N[X]$ donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
   Conclusion : On a trouvé une base de $\mathbb{R}_N[X]$ constituée de vecteurs propres de f_a donc f_a est diagonalisable (en particulier, sa matrice dans la base $\mathcal{F}$ est diagonale).

Exercice 15.

1. (a) • Soit $x \in \ker u$, on a $u(x) = 0$ donc $u^2(x) = u(u(x)) = u(0) = 0$ (car u est linéaire). Ainsi, $x \in \ker u^2$.
   On a donc $\ker u \subset \ker u^2$.
   • Montrons de même, $\ker u^n \subset \ker u^{n+1}$, quelque soit $n \in \mathbb{N}$:
   Soit $x \in \ker u^n$,on a $u^n(x) = 0$ donc $u^{n+1}(x) = u(u^n(x)) = u(0) = 0$. Donc $x \in \ker u^{n+1}$.
   Ainsi, $\ker u^n \subset \ker u^{n+1}$.

   (b) • Soit $y \in \operatorname{Im} u^2$, par définition d'une image, il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x)$ i.e. $y = u(u(x))$ donc $y = u(t)$ en posant $t = u(x)$. Donc y a bien un antécédent t par u i.e. $y \in \operatorname{Im} u$. On a donc $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$.
   • Montrons de même, $\operatorname{Im} u^{n+1} \subset \operatorname{Im} u^n$, quelque soit $n \in \mathbb{N}$:
   Soit $x \in \operatorname{Im} u^{n+1}$,il existe $x \in E$ tel que $y = u^{n+1}(x)$ i.e. $y = u^n(u(x))$ soit $y = u^n(t)$ en posant $t = u(x)$. Donc $y \in \operatorname{Im} u^n$.
   Ainsi, $\operatorname{Im} u^{n+1} \subset \operatorname{Im} u^n$.

2. Raisonnons par double implication :
   • Supposons $g \circ f = 0$ alors soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Montrons que $y \in \ker g$: $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$ (car $g \circ f = 0$) .Ainsi, $\operatorname{Im} f \subset \ker g$.
   On a donc montré :
   $$g \circ f = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} f \subset \ker g$$
   • Supposons maintenant $\operatorname{Im} f \subset \ker g$:
   Soit $x \in E$, alors $g(f(x)) = 0$ car $f(x) \in \operatorname{Im} f$ or $\operatorname{Im} f \subset \ker g$ donc $f(x) \in \ker g$ donc $g(f(x)) = 0$.
   On a donc montré :
   $$\operatorname{Im} f \subset \ker g \Rightarrow g \circ f = 0$$
   • **Conclusion :** $\operatorname{Im} f \subset \ker g \Leftrightarrow g \circ f = 0$

3. Raisonnons par double implication : • Supposons $\ker g \circ f = \ker f$. Montrons alors $\operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$ par double inclusion :
   - $0 \in \operatorname{Im} f$ et $0 \in \ker g$ car ce sont des espaces vectoriels donc $0 \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$. Ainsi $\{0\} \subset \operatorname{Im} f \cap \ker g$.
   - Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \ker g$ alors comme $x \in \operatorname{Im} f$, il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$ et comme $x \in \ker g$, $g(x) = 0$ donc $g(f(t)) =$. Donc $t \in \ker g \circ f$ donc $t \in \ker f$ (car $\ker g \circ f = \ker f$ d'après l'hypothèse) donc $x = f(t) = 0$. Ainsi, $\operatorname{Im} f \cap \ker g \subset \{0\}$.
   On a donc montré :
   $$\ker g \circ f = \ker f \Rightarrow \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$$
   • Réciproquement, supposons maintenant $\operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$. Montrons $\ker g \circ f = \ker f$ par double inclusion :
   - Soit $x \in \ker f$ alors $f(x) = 0$ donc $g(f(x)) = g(0) = 0$ donc $x \in \ker g \circ f$ (tjrs vrai, l'hypothèse n'a pas été utilisée).
   - Soit $x \in \ker g \circ f$, alors $g(f(x)) = 0$. On remarque qu'alors $f(x) \in \ker g$ mais bien sûr, $f(x) \in \operatorname{Im} f$ également (par définition d'une image) donc $f(x) \in \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$ donc $f(x) = 0$ i.e. $x \in \ker f$.
   Conclusion : $\ker g \circ f = \ker f$. On a donc montré :
   $$\operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\} \Rightarrow \ker g \circ f = \ker f$$
   Conclusion :
   $$\ker g \circ f = \ker f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \ker g = \{0\}$$

Exercice 16.
Méthode 1 : Montrons par récurrence $\forall k \geq n_0$, $P(k)$: "$\ker u_{k+1} = \ker u_k$".
• **Initialisation :** Par hypothèse on sait que $\ker u^{n_0+1} = \ker u^{n_0}$ donc $P(n_0)$ est vraie.
• **Hérédité :** Supposons qu'il existe un rang $k \geq n_0$ tel que $\ker u_{k+1} = \ker u_k$. Montrons $\ker u^{k+1=2} = \ker u^{k+1}$:
- On sait , d'après l'exercice précédent que $\ker u^{k+1} \subset \ker u^{k+2}$.
- Soit $x \in \ker u^{k+2}$, alors $u^{k+2}(x) = 0$ donc $u^{k+1}(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \ker u^{k+1} = \ker u^k$ donc $u^k(u(x)) = 0$ soit $u^{k+1}(x) = 0$. Ainsi, $\ker u^{k+2} \subset \ker u^{k+1}$.
Au final, on a $\ker u^{k+1} = \ker u^k$.
• **Conclusion :** $\forall k \geq n_0$, $\ker u^{k+1} = \ker u^k$.
La suite $(\ker u^k)$ est donc constante à partir de n_0 donc $\forall k \geq n_0$, $\ker u^k = \ker u^{n_0}$.

Méthode 2 : sans récurrence :
Montrons directement que $\ker u^{k+1} \subset \ker u^k$ pour tout $k \geq n_0$:
Soit $x \in \ker u^{k+1}$ alors $u^{k+1}(x) = 0$ i.e. $u^{n_0+1+k-n_0}(x) = 0$ i.e. $u^{n_0+1}(u^{k-n_0}(x)) = 0$ i.e. $u^{k-n_0}(x) \in \ker u^{n_0+1} = \ker u^{n_0}$ i.e. $u^{n_0}(u^{k-n_0}(x)) = 0$ soit $u^k(x) = 0$ donc $x \in \ker u^k$.

Exercice 17.

1. (a) • Supposons que u est bijectif, alors u admet une bijection réciproque u^{-1} . En composant par u^{-1} l'égalité $u^k = 0$ on obtient : $u^{-1} \circ u^k = u^{-1} \circ 0$ soit $u^{k-1} = 0$: contradiction.
Donc un endomorphisme nilpotent n'est jamais bijectif.

• Si u était injectif, il serait bijectif car c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donc u n'est pas injectif donc $\ker u \neq \{0\}$ d'où $dim(\ker u) \geq 1$.

(b) soit f la fonction nulle i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = 0$ donc $\ker f = \mathbb{R}^3$ et $\operatorname{Im} f = \{0\}$.
U^k est la fonction nulle donc $\ker u^k = \mathbb{R}^3$ donc $dim(\ker u^k) = 3$.

(c) Supposons $\ker u = \ker u^2$ (respectivement $\ker u^2 = \ker u^3$) alors $\forall n \geq 1$, on aurait $\ker u^n = \ker u$ d'après l'exercice précédent (respectivement $\forall n \geq 2$, on aurait $\ker u^n = \ker u^2$).
En particulier on aurait $\ker u^k = \ker u$ or $\ker u^k = \mathbb{R}^3$ donc $\ker u = \mathbb{R}^3$ donc $u = 0$ donc $k \leq 1$: contradiction . (respectivement, on aurait $\ker u^k = \ker u^2$ or $\ker u^k = \mathbb{R}^3$ donc $\ker u^2 = \mathbb{R}^3$ donc $u^2 = 0$ donc $k \leq 2$: contradiction
Donc $\ker u \neq \ker u^2 \neq \ker u^3$.

(d) On sait que $dim(\ker u) \geq 1$ d'après la question 1.
De plus, par noyaux itérés et d'après la question précédente, on a $\ker u \underset{\neq}{\subset} \ker u^2$ donc $dim(\ker u^2) \geq 2$.
De même, comme $\ker u^2 \underset{\neq}{\subset} \ker u^3$ alors $dim(\ker u^3) \geq 3$.
Or $\ker u^3 \subset \mathbb{R}^3$ donc $\ker u^3 = \mathbb{R}^3$. Ainsi, $u^3 = 0$.
Comme $u^3 = 0$, l'indice de nilpotence k de u est forcément inférieur ou égale à 3.
On obtient une contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé.
L'hypothèse de l'énoncé était donc fausse et on peut donc conclure que $k \leq 3$

2. On se place maintenant dans le cas particulier où $k = 3$.

(a) $u^2 \neq 0$ donc il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^2(x) \neq 0$ i.e. tel que $x \notin \ker u^2$.

(b) $\mathcal{B}$ est une famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre :
on résout l'équation $ax + bu(x) + cu^2(x) = 0$ (E_1) d'inconnues a, b et c réels.
Astuce : On sait que $u^3 = 0$ donc on compose plusieurs fois par u pour annuler des termes :
On compose par u, ce qui donne : $u(ax + bu(x) + cu^(x)) = u(0)$, ce qui donne par linéarité de u : $au(x) + bu^2(x) + cu^3(x) = 0$ soit $au(x) + bu^2(x) = 0$ (E_2) car $u^3(x) = 0$.
On compose à nouveau par u pour supprimer le terme en b :
$u(au(x) + bu^2(x)) = u(0) \Leftrightarrow au^2(x) + bu^3(x) = 0 \Leftrightarrow au^2(x) = 0$ (E_3).
On a donc le système d'équations : $\left\{\begin{array}{lcl} ax + bu(x) + cu^2(x) & = & 0 \\ au(x) + bu^2(x) & = & 0 \\ au^2(x) & = & 0 \end{array}\right.$.
Le système est échelonné, on remonte donc le système pour le résoudre : la dernière équation donne $a = 0$ car $u^2(x) \neq 0$ d'après 2.a)

La seconde équation donne donc $bu^2(x) = 0$ donc $b = 0$, et enfin, la première équation donne donc $c = 0$.
La famille est donc libre et $card(\mathcal{B}) = dim(\mathbb{R}^3))$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) • $\operatorname{Im} u^2 = Vect((u^2(x), u^2(u(x)), u^2(u^2(x))) = Vect(u^2(x), u^3(x), u^4(x)) = Vect(u^2(x), 0, 0) = Vect(u^2(x))$.
$u^2(x) \neq 0$ d'après 2.a) donc $((u^2(x))$ est une base de $\operatorname{Im} u^2$.

• **Méthode 1 :**
On résout l'équation $NX = 0$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On obtient $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\ker N = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\ker u = Vect(u^2(x))$.

Méthode 2 :
On remarque que le rang de la matrice N est de 2 (une colonne nulle qui n'engendre rien et deux colonnes non colinéaires) .
Donc $dim(\operatorname{Im} u) = rg(u) = 2$ et donc par théorème du rang $dim(\ker u) = 1$.
Or, la dernière colonne de N est nulle donc $u^2(x) \in \ker u$. C'est un vecteur libre (non nul) dans un espace vectoriel de dimension 1 donc c'est une base de $\ker u$.

• Conclusion : $\operatorname{Im} u^2 = \ker u$.