TD 6 - Couples et suites de variables aléatoires

Exercice 1.
La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	p	0	p
2	p	0	p
3	0	$2p$	0

1. Déterminer p.
2. Déterminer les lois marginales.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la covariance du couple (X, Y).
5. Calculer $P(X = Y)$
6. Calculer $P(X < Y)$
7. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 2.
On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée.
On lance le dé et on observe son résultat :
Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois.
Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles apparus au cours de cette expérience.

1. reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y). (on donnera cette loi sous forme d'un tableau à double entrée et on justifiera précisément le calcul d'au moins 3 valeurs de ce tableau).
3. En déduire la loi marginale de Y.
4. les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 3. : **loi d'un deuxième temps d'attente**
On lance un dé indéfiniment ; X est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier "6".
Z est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux "6".

1. **Méthode 1 : loi du deuxième temps d'attente obtenue comme loi marginale**
   (a) Déterminer la loi du couple (X, Z).
   (b) En déduire la loi de Z.
2. **Méthode 2 : loi du deuxième temps d'attente comme somme de temps d'attentes** On note Y le nombre de lancers nécessaires, après l'obtention du premier "6", pour obtenir le deuxième "6".
   (a) Justifier que X et Y sont indépendantes et donner leurs lois.
   (b) Exprimer Z en fonction de X et de Y. Retrouver alors la loi de Z et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 4.
Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries de B ou R : par exemple, si les lancers donnent les résultats $BBRRRRRRBBBRR$... alors la première série (BB) est de longueur 2 et la deuxième série $(RRRRRR)$ est de longueur 6.
Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

1. Déterminer la loi de X_1. Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
3. En déduire la loi de X_2.
4. Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 5.
n boîtes sont numérotées de 1 à n. La boîte $n^o\, k$ contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte.
Soit X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenus.

1) Déterminer la loi de X et la loi conjointe du couple (X, Y).
2) Calculer $P(X = Y)$. *on laissera le résultat sous forme d'une somme.*
3)Calculer la loi de Y et son espérance.
Pour le calcul de l'espérance, on utilisera l'égalité suivante : $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=k}^{n} a_{k,i} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{i} a_{k,i}$

Exercice 6.
Un individu joue avec une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0; 1[$, de la façon suivante :
-Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.
- Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois pile, alors il relance n fois sa pièce.
On appelle alors X le nombre de piles obtenu au cours de ces n lancers.
On admet que $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ et on pourra noter $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de N.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle à $[N = n]$ de X.
3. En déduire la loi de X.
4. On considère B et G deux VAR indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p')$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.
   (a) Déterminer la loi de la VAR BG.
   (b) Montrer qu'il existe p' (à déterminer) tel que X a la même loi que la variable BG.
   (c) En déduire $E(X)$.

Exercice 7.
On admet que le nombre N de têtards issus des oeufs pondus en mars et avril d'une année par les grenouilles vertes d'un étang suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Ces têtards sont soumis à des prédateurs nombreux et voraces (poissons, larves de libellules...), et on admet que chacun d'entre eux a la probabilité p, hélas très faible, de parvenir à son développement complet, et qu'ils se développent (ou sont dévorés) de façon indépendante.
On note X le nombre de têtards qui parviennent à leur développement complet et se transforment ainsi à l'automne en une mignonne petite grenouille verte d'environ 2cm de long, et Y le nombre de ceux qui meurent avant. On a ainsi, $N = X + Y$.

1. Déterminer pour tout couple (i, k) d'entiers naturels, la probabilité conditionnelle $P_{(N=k)}(X = i)$.
   On distinguera les cas $i \leq k$ et $i > k$.
2. En déduire que X suit une loi de Poisson de paramètre λp.
   on fera apparaître, au cours du calcul, une série exponentielle de paramètre $x = \lambda(1 - p)$.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.
4. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, calculer la probabilité $P\left((X = i) \cap (Y = j)\right)$.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8.
Un secrétaire envoie un courrier nécessitant une réponse à n contacts ($n \geq 2$). On admet que les contacts répondent à tout message de façon indépendante et avec la probabilité p, ($p \in]0,1[$). On note X le nombre de réponses reçues. Le secrétaire envoie alors un message de rappel aux $n - X$ contacts qui n'ont pas répondu. On note Y le nombre de réponses à ce deuxième message et $Z = X + Y$ le nombre total de réponses.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer $Z(\Omega)$. Calculer $P(Z = 0)$ et montrer : $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1 + q)$, où $q = 1 - p$.
3. Calculer, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, et $\forall j \in [\![0, n - i]\!]$, $P_{(X=i)}(Y = j)$.
4. Justifier que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(Z = k) = \sum\limits_{i=0}^{k} P\left((X = i) \cap (Y = k - i)\right)$.
5. Après avoir vérifié : $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$, montrer que Z suit la loi binomiale de paramètres n et $p(1 + q)$.

Exercice 9. : **loi du min, loi du max**
Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes les deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X \leq k)$ et $P(X > k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. On note $Z = sup(X, Y)$.
   (a) Calculer $P(Z \leq k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
   (b) Prouver l'égalité pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k - 1)$.
   (c) En déduire $P(Z = k)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
3. On note $T = inf(X, Y)$.
   (a) Calculer $P(T > k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire $P(T = k)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Reconnaître la loi de T.

Exercice 10.
Soit $n > 0$; on considère n personnes qui se répartissent au hasard dans trois hôtels H_1, H_2 et H_3.
Pour tout $i \in [\![1; 3]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.

1. Déterminer la loi des trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3, leurs espérances et leurs variances.
2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$, son espérance et sa variance.
3. Calculer la covariance de X_1 et X_2 puis leur coefficient de corrélation linéaire.

Exercice 11.
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.r. de Bernoulli mutuellement indépendantes, de même paramètre p.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Déterminer la loi de Y_i. Etudier l'indépendance de Y_i et Y_j, $(i \neq j)$.
2. Soit $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer l'espérance et la variance de S_n.