Correction du TD 6

Exercice 1.
La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	p	0	p
2	p	0	p
3	0	$2p$	0

1. S'il s'agit bien d'une loi de couple, alors la famille $([(X = i) \cap (Y = j)])_{1 \leq i,j \leq 3}$ est un système complet d'évènements donc

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 3} P[(X = i) \cap (Y = j)] = 1 \iff p + 0 + p + p + 0 + p + 0 + 2p + 0 = 1 \iff 6p = 1 \iff p = \frac{1}{6}.$$

Réciproquement, si $p = 1/6$, il s'agit bien d'une loi de couple car toutes les probabilités sont positives et leur somme fait 1.

2. Commençons par la loi de X : on sait que

$$X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$$

puis on calcule les probabilités une par une (car il n'y a que quelques valeurs, et aucun cas général) ; pour une loi marginale, on applique les probabilités totales avec le sce de l'autre variable :

D'après les probabilités totales avec le système complet d'évènements $[(Y = 1), (Y = 2), (Y = 3)]$ on a :

$$(X = 1) = [X = 1] \cap [Y = 1] \bigcup [X = 1] \cap [Y = 2] \bigcup [X = 1] \cap [Y = 3]$$

donc

$$P(X = 1) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) + P([X = 1] \cap [Y = 2]) + P([X = 1] \cap [Y = 3]) = p + 0 + p = 2p = \frac{1}{3}.$$

De même,

$$P(X = 2) = P([X = 2] \cap [Y = 1]) + P([X = 2] \cap [Y = 2]) + P([X = 2] \cap [Y = 3]) = p + 0 + p = 2p = \frac{1}{3}$$

et

$$P(X = 3) = P([X = 3] \cap [Y = 1]) + P([X = 3] \cap [Y = 2]) + P([X = 3] \cap [Y = 3]) = 0 + 2p + 0 = 2p = \frac{1}{3}.$$

Passons à la loi de Y :

$$Y(\Omega) = \{1; 2; 3\}$$

et d'après les probabilités totales avec le système complet d'évènements $[(X = 1), (X = 2), (X = 3)]$ on a :

$$P(Y = 1) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) + P([X = 2] \cap [Y = 1]) + P([X = 3] \cap [Y = 1]) = p + p + 0 = 2p = \frac{1}{3}.$$

$$(Y=1)=[X=1]\cap[Y=1]\bigcup[X=2]\cap[Y=1]\bigcup[X=3]\cap[Y=1]$$

De même,

$$P(Y=2)=P([X=1]\cap[Y=2])+P([X=2]\cap[Y=2])+P([X=3]\cap[Y=2])=0+0+2p=2p=\frac{1}{3}$$

et

$$P(Y=3)=P([X=1]\cap[Y=3])+P([X=2]\cap[Y=3])+P([X=3]\cap[Y=3])=p+p+0=2p=\frac{1}{3}.$$

(Y et X suivent donc la même loi).

3. Comme on n'a pas calculé la covariance, on utilise la définition. S'il y en a un, on utilise un cas impossible de la loi du couple pour obtenir la non indépendance. Par exemple ici :

$$P([X=1]\cap[Y=2])=0 \quad \text{et} \quad P(X=1)P(Y=2)=\frac{1}{9}\neq 0$$

donc X et Y ne sont pas indépendantes.

4. Comme ni $X+Y$ ni sa variance n'est connu (pour utiliser la formule de $V(X+Y)$), et que X et Y ne s'écrivent pas en fonction d'autres variables (pour utiliser la bilinéarité), on utilise la formule de Koenig-Hughens :

$$\text{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

On calcule ces trois quantités :

— Comme la loi de XY n'est pas connue et que la linéarité ne s'applique pas, on calcule $E(XY)$ par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} i\times j\times P([X=i]\cap[Y=j]) \\ &= 1\times p+2\times 0+3\times p+2\times p+4\times 0+6\times p+3\times 0+6\times 2p+9\times 0 \\ &= p+3p+2p+6p+12p=24p=4. \end{aligned}$$

— Comme les lois de X et Y sont connues, on utilise la définition :

$$E(X)=1\times 2p+2\times 2p+3\times 2p=2p+4p+6p=12p=2=E(Y)$$

car X et Y suivent la même loi.

Enfin on en déduit que :

$$\text{cov}(X,Y)=4-2\times 2=0.$$

5. Comme l'évènement dépend de deux variables aléatoires, on utilise les probabilités totales avec le système complet d'évènements de l'une des deux variables : ici les deux systèmes complets sont équivalents (chacun a trois évènements) donc on choisit celui qu'on veut. Par exemple :

$[(X=1),(X=2),(X=3)]$ est un système complet d'évènements donc par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= P[(X=1)\cap(X=Y)]+P[(X=2)\cap(X=Y)]+P[(X=3)\cap(X=Y)] \\ &= P[(X=1)\cap(Y=1)]+P[(X=2)\cap(Y=2)]+P[(X=3)\cap(Y=3)]=p+0+0=p=\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

6. De même (l'évènement dépend de deux variables aléatoires), avec le système complet d'évènements $[(X=1),(X=2),(X=3)]$ la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(X<Y) &= P(X<Y)=P[(X=1)\cap(X<Y)]+P[(X=2)\cap(X<Y)]+P[(X=3)\cap(X<Y)] \\ &= P[(X=1)\cap(Y>1)]+P[(X=2)\cap(Y>2)]+P[(X=3)\cap(Y>3)] \end{aligned}$$

Ensuite les probabilités d'inégalités s'obtiennent en les écrivant comme réunion des valeurs qui conviennent :

$$\begin{aligned} P(X<Y) &= P\left[(X=1)\cap\Big((Y=2)\cup Y=3\Big)\right]+P[(X=2)\cap(Y=3)]+P[(X=3)\cap\emptyset] \\ &= P\left[\Big((X=1)\cap(Y=2)\Big)\cup\Big((X=1)\cap(Y=3)\Big)\right]+P[(X=2)\cap(Y=3)] \end{aligned}$$

Enfin par incompatibilité de la réunion on obtient :

$$P(X<Y)=P[(X=1)\cap(Y=2)]+P[(X=1)\cap(Y=3)]+P[(X=2)\cap(X=3)]=0+p+p=2p=\frac{1}{3}.$$

7. On commence par donner $Z(\Omega)$: ce sont les sommes de d'un élément de $\{1;2;3\}$ et d'un élément de $\{1;2;3\}$ donc
$$Z(\Omega)=\{2;3;4;5\}$$
Ensuite, une fois de plus, les probabilités d'évènements avec deux variables aléatoires s'obtiennent par probabilités totales avec le système complet de l'une des deux. Cependant on peut aussi décomposer l'évènement "à la main" (on aurait aussi pu le faire dans les deux cas précédents) ce qu'on va faire ici :

— $(Z=2)=(X+Y=2)$ n'est possible que si $X=1$ et $Y=1$, donc :
$$(Z=2)=(X=1)\cap(Y=1) \quad \text{et} \quad P(Z=2)=P[(X=1)\cap(Y=1)]=p=\frac{1}{6}.$$

— $(Z=3)=(X+Y=3)$: si $X=1$, il faut $Y=2$; si $X=2$, il faut $Y=1$; si $X=3$, c'est impossible donc :
$$(Z=3)=[(X=1)\cap(Y=2)]\cup[(X=2)\cap(Y=1)]$$
et par incompatibilité de la réunion :
$$P(Z=3)=P[(X=1)\cap(Y=2)]+P[(X=2)\cap(Y=1)]=0+p=p=\frac{1}{6}.$$

— $(Z=4)=(X+Y=4)$: si $X=1$, il faut $Y=3$; si $X=2$, il faut $Y=2$; si $X=3$, il faut $Y=1$ donc :
$$(Z=4)=[(X=1)\cap(Y=3)]\cup[(X=2)\cap(Y=2)]\cup[(X=3)\cap(Y=1)]$$
et par incompatibilité de la réunion :
$$P(Z=4)=P[(X=1)\cap(Y=3)]+P[(X=2)\cap(Y=2)]+P[(X=3)\cap(Y=1)]=p+0+0=p=\frac{1}{6}.$$

— $(Z=5)=(X+Y=5)$: si $X=1$, c'est impossible ; si $X=2$, il faut $Y=3$; si $X=3$, il faut $Y=2$ donc :
$$(Z=5)=[(X=2)\cap(Y=3)]\cup[(X=3)\cap(Y=2)]$$
et par incompatibilité de la réunion :
$$P(Z=5)=P[(X=2)\cap(Y=3)]+P[(X=3)\cap(Y=2)]=p+2p=3p=\frac{1}{2}.$$

Exercice 2.
On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée.
On lance le dé et on observe son résultat :
Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois.
Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles apparus au cours de cette expérience.

1. X suit la loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$ donc :
$$E(X)=\frac{1+6}{2}=\frac{7}{2} \quad \text{et} \quad V(X)=\frac{6^2-1}{12}=\frac{35}{12}.$$

2. On commence par donner $X(\Omega) = [\![1;6]\!]$ et $Y(\Omega) = \{0;1;2\}$.

   On va justifier une valeur pour $X = 6$ qui est à part, puis une pour $X = 1$ et une pour $X = 2$, en changeant à chaque fois la valeur de Y pour varier :

   — On note P_i : "obtenir pile au ième lancer de la pièce" , F_i : "obtenir face au ième lancer"

   $P[(X = 6)\cap(Y = 0)] = P(X = 6)P_{(X=6)}(Y = 0) = P(X = 6)P(F_1\cap F_2) = P(X = 6)P(F_1)P(F_2)$

   par indépendance des lancers de pièce donc :

$$P[(X = 6) \cap (Y = 0)] == \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

   —

$$P[(X = 1) \cap (Y = 1)] = P(X = 1)P_{(X=1)}(Y = 1) = P(X = 1)P(P_1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

   — $(X = 2) \cap (Y = 2)$ signifie qu'on a tiré un 2, donc lancé la pièce une fois pour obtenir deux piles. C'est impossible donc :

$$(X = 2) \cap (Y = 2) = \emptyset \quad \text{et} \quad P[(X = 2) \cap (Y = 2)] = 0.$$

   On remplit ensuite sur le même modèle le tableau :

$X \backslash Y$	0	1	2
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
5	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
6	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

   et on explicite la seule valeur dont le calcul est un peu différente : $(X = 6) \cap (Y = 1)$ signifie qu'on a tiré un 6, donc lancé la pièce deux fois pour obtenir un pile. On peut donc décomposer selon le tirage où on obtient Pile :

$$(X = 6) \cap (Y = 1) = [(X = 6) \cap P_1 \cap F_2] \cup [(X = 6) \cap F_1 \cap P_2]$$

   et par incompatibilité de la réunion et indépendance des 3 tirages :

$$P[(X = 6) \cap (Y = 1)] = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

3. On a vu que $Y(\Omega) = \{0;1;2\}$ et on obtient les probabilités d'une loi marginale par probabilités totales avec le sce de l'autre variable :

   $(X = k)_{k\in[\![1;6]\!]}$ est un système complet d'évènements donc :

$$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{6} P[(X = k) \cap (Y = 0)] = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = 5 \times \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{11}{24}.$$

   De même

$$P(Y = 1) = \sum_{k=1}^{6} P[(X = k) \cap (Y = 1)] = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{12} = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

Enfin
$$P(Y=2)=\sum_{k=1}^{6}P[(X=k)\cap(Y=2)]=\sum_{k=1}^{5}0+\frac{1}{24}=\frac{1}{24}.$$

4. On utilise un 0 de la loi du couple :
$$P[(X=1)\cap(Y=2)]=0 \quad \text{et} \quad P(X=1)P(Y=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{24}\neq 0$$
donc X et Y ne sont pas indépendantes.

5. On ne connaît pas $X+Y$ ni sa variance, et X et Y ne s'écrivent pas en fonction d'autres variables. On utilise donc la formule de Koenig-Huyghens :
$$\text{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$
On calcule ces trois quantités :

— Comme la loi de XY n'est pas connue et que la linéarité ne s'applique pas, on calcule $E(XY)$ par théorème de transfert :
$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=1}^{6}\sum_{j=0}^{2}k\times j\times P([X=k]\cap[Y=j])\\
&= \sum_{k=1}^{6}\sum_{j=1}^{2}k\times j\times P([X=k]\cap[Y=j])+0\\
&= 1\times\frac{1}{12}+2\times 0+2\times\frac{1}{12}+4\times 0+3\times\frac{1}{12}+\\
&\quad 6\times 0+4\times\frac{1}{12}+8\times 0+5\times\frac{1}{12}+10\times 0+6\times\frac{1}{12}+12\times\frac{1}{24}\\
&= \frac{1+2+3+4+5}{12}+1=\frac{15}{12}+\frac{12}{12}=\frac{27}{12}.
\end{aligned}$$
— On a déjà vu que $E(X)=\frac{7}{2}$, enfin comme on connaît la loi de Y on utilise la définition :
$$E(Y)=0\times\frac{11}{24}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{24}=\frac{6+1}{12}=\frac{7}{12}.$$
Enfin on en déduit que :
$$\text{cov}(X,Y)=\frac{27}{12}-\frac{7}{2}\times\frac{7}{12}=\frac{5}{24}.$$

Exercice 3. : **loi d'un deuxième temps d'attente**
On lance un dé indéfiniment ; X est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier "6".
Z est le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux "6".

1. **Méthode 1 : loi du deuxième temps d'attente obtenue comme loi marginale**
   (a) Tout d'abord $X(\Omega)=[\![1;+\infty[\![$ et $Z(\Omega)=[\![2;+\infty]\!]$ puis on cherche les probabilités, pour k et j fixés, de $(X=k)\cap(Z=j)$.

   $(X=k)\cap(Z=j)$ signifie que le premier "6" arrive au lancer n° k et le second au lancer j. On remarque donc, en posant A_i : "on obtient un "6" au lancer n° i", que :

   — Si $j\leq k$, c'est impossible (le 2e ne peut arriver avant ou en même temps que le premier) :
   $$(X=k)\cap(Z=j)=\emptyset \quad \text{donc} \quad P[(X=k)\cap(Z=j)]=0.$$
   — Si $j>k$, on a :
   $$(X=k)\cap(Z=j)=\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}\cap A_k\cap\overline{A_{k+1}}\cap\cdots\cap\overline{A_{j-1}}\cap A_j$$
   donc par indépendance des lancers :
   $$P[(X=k)\cap(Z=j)]=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{j-1-(k+1)+1}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{j-2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}.$$

(b) On a vu que $Z(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$, et on obtient les lois marginales par probabilités totales avec le sce de l'autre variable :

$(X = k)_{k\in[\![1;+\infty}$ est un système complet d'évènements donc les probabilités totales donnent, pour tout j fixé de $[\![2;+\infty[\![$:

$$P(Y = j) = \sum_{k=1}^{+\infty} P[(X = k) \cap (Y = j)]$$

Comme on a deux formules pour cette probabilité, il faut séparer la somme en deux parties pour pouvoir remplacer : la première formule concerne les (k, j) tels que $j \leq k \iff k \geq j$ donc :

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{k=1}^{j-1} P[(X = k) \cap (Y = j)] + \sum_{k=j}^{+\infty} P[(X = k) \cap (Y = j)] = \sum_{k=1}^{j-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \sum_{k=j}^{+\infty} 0 \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{j-2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \sum_{k=1}^{j-1} 1 = \left(\frac{5}{6}\right)^{j-2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times (j - 1 - 1 + 1) \\ &= (j-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{j-2} \left(\frac{1}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

2. **Méthode 2 : loi du deuxième temps d'attente comme somme de temps d'attentes** On note Y le nombre de lancers nécessaires, après l'obtention du premier "6", pour obtenir le deuxième "6".

(a) Comme les lancers qui définissent Y ne commencent qu'après ceux qui ont défini X et par indépendance mutuelle des lancers, X et Y sont indépendantes.
De plus X et Y on pour support $[\![1;+\infty[\![$, et comptent chacune le rang du premier succès dans une succession illimitée de tirages identiques et indépendants.

De plus dans les deux cas, pour un tirage, le succès est "obtenir un 6", de probabilité $\frac{1}{6}$: elles suivent donc toutes les deux la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

(b) A la lecture de l'énoncé, il vient immédiatement $Z = X + Y$ (le nombre total de lancers pour obtenir 2 succès est égal au nombre pour obtenir le premier auquel on ajoute le nombre, à partir de là, pour obtenir le second).

On retrouve alors que $Z(\Omega) = [\![2;+\infty]\!]$ puis avec les probabilités totales avec le sce $(X = j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ (l'évènement dépend de deux variables aléatoires), pour tout $k \in [\![2;+\infty]\!]$ fixé on a :

$$P(Z = k) = P(X + Y = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} P[(X = j) \cap (X + Y = k)] = \sum_{j=1}^{+\infty} P[(X = j) \cap (Y = k - j)]$$

puis par indépendance de X et Y :

$$P(Z = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = j)P(Y = k - j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} P(Y = k - j).$$

La formule de la loi de Y est alors valable pour $k - j \geq 1 \iff j \leq k - 1$, sinon la probabilité est nulle car $k - j \leq 0$:

$$P(Z = k) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-j-1} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \times 0$$

et enfin en rassemblant les puissances puis en remarquant que la quantité sommée ne dépend plus de j :

$$P(Z = k) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = (k-1) \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}.$$

Exercice 4.
Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries de B ou R : par exemple, si les lancers donnent les résultats $BBRRRRRRBBBRR$... alors la première série (BB) est de longueur 2 et la deuxième série $(RRRRRR)$ est de longueur 6.
Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

1. On remarque en premier lieu que $X_1(\Omega) = [\![1;+\infty]\!]$.

   Ensuite pour calculer $P(X_1 = k)$ pour k fixé, on décompose l'évènement : pour avoir une première série de taille k, il faut et il suffit de changer pour la première fois de résultat au $k+1$-e tirage. selon le résultat du premier lancer on obtient :
   $$(X_1 = k) = [B_1 \cap \dots B_k \cap R_{k+1}] \cup [R_1 \cap \dots \cap R_k \cap B_{k+1}]$$
   et par incompatibilité de la réunion et indépendance des tirages :
   $$P(X_1 = k) = \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6}.$$
   On s'intéresse alors à la convergence absolue et la valeur de la série :
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} kP(X_1 = k)$$
   Comme tous les termes sont positifs, la convergence absolue est équivalente à la convergence. Comme on veut la convergence **et la valeur**, on revient à la somme partielle puis on reconnaît une ou plusieurs séries usuelles, ou bien on calcule la somme par télescopage :
   $$\sum_{k=1}^{n} kP(X_1 = k) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{6}\right)^k \times \frac{5}{6} + \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} + \frac{5}{36}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$
   On reconnaît deux séries géométriques dérivées de raison $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$, avec $\left|\frac{1}{6}\right| < \left|\frac{5}{6}\right| < 1$ donc elles convergent absolument. On en déduit que X_1 admet une espérance et :
   $$E(X_1) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2} + \frac{5}{36} \times \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{36} \times \frac{6^2}{5^2} + \frac{5}{36} \times 6^2 = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}.$$

2. On a déjà vu que $X_1(\Omega)[\![1;+\infty[\![$, et de même on voit que $X_2(\Omega) = [\![1;+\infty[\![$. On décompose alors, pour k et j fixés :

   $(X_1 = k) \cap (X_2 = j)$ signifie qu'on a une série de k tirages identiques, puis qu'on change pour une série de j tirages identiques, et qu'on change à nouveau pour arrêter la deuxième série. Selon le résultat du premier tirage on a donc :
   $$(X_1 = k)\cap(X_2 = j) = (B_1\cap\dots\cap B_k\cap R_{k+1}\cap\dots\cap R_{k+j}\cap B_{K+j+1})\cup(R_1\cap\dots\cap R_k\cap B_{k+1}\cap\dots\cap B_{k+j}\cap R_{k+j+1}$$
   donc par incompatibilité de la réunion et par indépendance des tirages :
   $$P[(X_1 = k) \cap (X_2 = j)] = \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^j \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^j \frac{5}{6}.$$

3. On a vu que $X_2(\Omega) = [\![1;+\infty]\!]$, et de plus c'est une loi marginale donc on utilise les probabilités totales avec le système complet d'évènements $(X = k)_{k\in[\![1;+\infty[\![}$: pour tout $j \in [\![1;+\infty]\!]$ fixé,
   $$\begin{aligned}
   P(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P[(X_1 = k) \cap (X_2 = j)] = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^j \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^j \frac{5}{6} \\
   &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \left(\frac{1}{6}\right)^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{k'} + \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k'} \\
   &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{1}{6}} + \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{1-\frac{5}{6}} \\
   &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{6}{5} + \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times 6 \\
   &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \frac{1}{30} + \left(\frac{1}{6}\right)^j \frac{25}{6}.
   \end{aligned}$$

4. Comme on n'a pas la covariance, on utilise la loi du couple : comme on n'a pas de 0 dans la loi, on prend un évènements "au hasard" (cela ne sert à rien de prendre le cas général puisque le résultat à trouver est donner, il suffit donc d'un contre-exemple) : par exemple

$$P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{5}{6^3} + \frac{25}{6^3} = \frac{30}{6^3} = \frac{5}{36}$$

d'une part, alors que

$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \left[\frac{5}{36} + \frac{5}{36}\right] \times \left[\frac{5}{6 \times 30} + \frac{25}{36}\right] = \frac{10}{36} \times \frac{26}{36} = \frac{5}{36} \times \frac{52}{36} \neq \frac{5}{36}$$

donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 5.
n boîtes sont numérotées de 1 à n. La boîte $n^o\, k$ contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte.
Soit X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenus.

1. X suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ donc $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Pour la loi du couple, on donne d'abord $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

(Remarquer que k n'est pas une donnée du problème donc $Y(\Omega)$ ne peut valoir $[\![1;k]\!]$! En fait Y peut prendre toutes les valeurs de 1 à k, et ce pour chaque k allant de 1 à n donc au final elle peut prendre toutes les valeurs de 1 à n.)

On calcule ensuite les probabilités. Pour tout $(k,i) \in [\![1;n]\!]^2$ on a, avec $(X = k)$ qui a lieu avant $(Y = i)$:

$$P[(X = k) \cap (Y = i)] = P(X = k) \times P_{(X=k)}(Y = i) = \frac{1}{n} P_{(X=k)}(Y = i).$$

On cherche ensuite les probabilités conditionnelles : sachant $(X = k)$, Y suit la loi uniforme sur $[\![1;k]\!]$ donc pour tout $i \in [\![1;k]\!]$ on a :

$$P_{(X=k)}(Y = i) = \frac{1}{k}$$

Attention, cette formule n'est valable que pour $1 \leq i \leq k$; sinon la probabilité conditionnelle est nulle donc :

$$P[(X = k) \cap (Y = i)] = \begin{cases} \frac{1}{nk} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. $(X = Y)$ est un évènement qui dépend de deux variables aléatoires, on applique les probabilités totales avec le système complet $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$:

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} P[(X = k) \cap (X = Y)] = \sum_{k=1}^{n} P[(X = k) \cap (Y = k)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

3. On a vu que $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Ensuite, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, les probabilités totales avec le système complet $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$ donnent :

$$P(Y = i) = \sum_{k=1}^{n} P[(X = k) \cap (Y = i)] = \sum_{k=1}^{i-1} 0 + \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k}.$$

Par suite avec la définition de l'espérance :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{i}{k}.$$

On échange l'ordre des sommes en remarquant que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} = \sum_{1\leq i\leq k\leq n} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}$$

donc :

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right] = \frac{1}{2n}\left(\frac{(n)(n+1)}{2} + n\right) = \frac{n+3}{4}$$

Exercice 6.
Un individu joue avec une pièce truquée, pour laquelle la porbabilité d'obtenir pile est $p \in]0;1[$, de la façon suivante :
-Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.
- Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois pile, alors il relance n fois sa pièce.
On appelle alors X le nombre de piles obtenu au cours de ces n lancers.
On admet que $\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ et on pourra noter $q = 1-p$.

1. D'abord $N(\Omega) = [\![1;+\infty]\!]$.

   De plus N compte le rang du premier succès ("obtenir Pile", de probabilité p) dans une succession illimitée de tirages identiques et indépendants, donc N suit la loi géométrique de paramètre p.

2. D'abord $X_{(N=n)}(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

   De plus sachant $(N=n)$, X compte le nombre de succès ("obtenir pile", de probabilité p) dans une succession de n tirages identiques et indépendants, donc $X_{(N=n)}$ suit la loi binomiale de paramètres n et p.

3. D'abord $X(\Omega) = \mathbb{N}$ (n n'est pas une donnée de l'énoncé, c'est la valeur de N qui peut prendre des valeurs de 1 à l'infini !)

   On veut la loi marginale d'un couple, on applique les probabilités totales avec le système complet de l'autre variable, $(N=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: pour tout $k \in \mathbb{N}$,

   $$P(X=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P[(N=n)\cap(X=k)] = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)P_{(N=n)}(X=k).$$

   On utilise alors la loi conditionnelle de la question 2 : pour que la formule de la loi binomiale s'applique, il faut avoir $0 \leq k \leq n$ donc $n \geq k$, sinon la probabilité est nulle. On a deux cas :

   — Pour $k=0$ la condition est toujours vraie, on obtient :

   $$P(X=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}p\binom{n}{0}p^0q^n = p\sum_{n=1}^{+\infty} q^{2n-1} = pq^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(q^2)^n = pq^{-1}\times q^2\times\frac{1}{1-q^2} = \frac{pq^2}{q(1-q)(1+q)} = \frac{q}{1+q}.$$

   — Pour $k \geq 1$ il faut commencer la somme ç k car les valeurs précédentes sont nulles :

   $$P(X=k) = 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n-1}p\binom{n}{k}p^kq^{n-k} = p^{k+1}q^{-k-1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}(q^2)^n$$

   On utilise la formule du binôme négatif admise dans l'énoncé :

   $$P(X=k) = p^{k+1}q^{-k-1}\times\frac{q^{2k}}{(1-q^2)^{k+1}} = \frac{p^{k+1}q^{2k}}{q^{k+1}[(1-q)(1+q)]^{k+1}} = \frac{p^{k+1}q^{k-1}}{p^{k+1}(1+q)^{k+1}} = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}.$$

4. On considère B et G deux VAR indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p')$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.

(a) Comme B prend les valeurs 0 et 1, et G les valeurs de $\mathbb{N}^*$, BG prend la valeur 0 si $B = 0$ et toutes les valeurs de $\mathbb{N}^*$ si $B = 1$. On en déduit que :

$$(BG)(\Omega) = \mathbb{N}$$

puis comme $G \geq 1$, $G \neq 0$ donc :

$$(BG = 0) = (B = 0) \quad \text{et} \quad P(BG = 0) = P(B = 0) = 1 - p'.$$

Par probabilités totales avec le sce $[(B = 0), (B = 1)]$ (on pouvait aussi traiter la probabilité précédente avec ce sce), pour $k \geq 1$,

$$P(BG = k) = P([B = 0] \cap [BG = k]) + P([B = 1] \cap (BG = k]) = P(\emptyset) + P([B = 1] \cap [G = k])$$

et par indépendance de B et G :

$$P(BG = k) = P(B = 1)P(G = k) = p'q'^{k-1}p' = p'^2q'^{k-1}.$$

(b) Pour que les lois soient les mêmes , il faut que le supports soient les mêmes (c'est le cas, $\mathbb{N}$ pour les deux) puis que toutes les probabilités soient égales. Il faut donc :

$$P(X = 0) = P(BG = 0) \Longleftrightarrow \frac{q}{1+q} = 1 - p' \Longleftrightarrow p' = 1 - \frac{q}{1+q} = \frac{1+q-q}{1+q} = \frac{1}{1+q}.$$

Vérifions alors que les autres valeurs sont égales : pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(BG = k) &= p'^2q'^{k-1} = \frac{1}{(1+q)^2} \times \left(1 - \frac{1}{1+q}\right)^{k-1} = \frac{1}{(1+q)^2} \times \frac{(1+q-1)^{k-1}}{(1+q)^{k-1}} \\ &= \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} = P(X = k) \end{aligned}$$

donc lorsque $p' = \frac{1}{1+q}$, les lois de BG et X sont les mêmes.

(c) On en déduit qu'en posant $p' = \frac{1}{1+q}$, par indépendance de B et G :

$$E(X) = E(BG) = E(B)E(G) = p' \times \frac{1}{p'} = 1.$$

Exercice 7.
On admet que le nombre N de têtards issus des oeufs pondus en mars et avril d'une année par les grenouilles vertes d'un étang suit une loi de Poisson (si, si !) de paramètre λ.
Ces têtards sont soumis à des prédateurs nombreux et voraces (poissons, larves de libellules...), et on admet que chacun d'entre eux a la probabilité p, hélas très faible, de parvenir à son développement complet, et qu'ils se développent (ou sont dévorés) de façon indépendante.
On note X le nombre de têtards qui parviennent à leur développement complet et se transforment ainsi à l'automne en une mignonne petite grenouille verte d'environ 2cm de long, et Y le nombre de ceux qui meurent avant. On a ainsi, $N = X + Y$.

1. — Si $i > k$, comme il ne peut y avoir plus de grenouilles à la fin que de têtards au début,

$$P_{(N=k)}(X = i) = 0.$$

— Si $i \leq k$, $X_{N=k}$ suit une loi binomiale de paramètres k et p, donc :

$$P_{(N=k)}(X = i) = \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.$$

2. D'abord $X(\Omega) = \mathbb{N}$ car n peut prendre toutes les valeurs de 0 à l'infini.

De plus (loi marginale d'un couple), avec le sce $(N = k)_{k\in\mathbb{N}}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(X = i) = \sum_{k=0}^{+\infty} P[(N = k) \cap (X = i)]$$

Or $(N = k)$ a lieu avant $(X = i)$, puis on sépare en deux sommes pour faire apparaître les deux cas pour la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= \sum_{k=0}^{i-1} 0 + \sum_{k=i}^{+\infty} P(N=k)P_{(N=k)}(X=i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\
&= p^i e^{-\lambda} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{\lambda^k q^{k-i}}{k!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{p^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+i} q^j}{j!} \\
&= \frac{p^i \lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!} = \frac{p^i \lambda^i e^{-\lambda}}{i!} e^{\lambda q} = \frac{(\lambda p)^i e^{\lambda q - \lambda}}{i!} \\
&= \frac{(\lambda p)^i e^{\lambda(q-1)}}{i!} = \frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda p}}{i!}
\end{aligned}$$

et X suit bien la loi de Poisson de paramètre λp.

3. En appliquant le résultat de la question 2 à $p' = q = 1 - p$ et par symétrie du problème, Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda q = \lambda(1-p)$.

4. On sait que $N = X + Y$, on peut alors écrire Y en fonction de N et X pour utiliser la question 1 :

$$P([X=i] \cap (Y=j)] = P([X=i] \cap [N-X=j]) = P([X=i] \cap [N=i+j])$$

et comme N a lieu avant, on calcule :

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = P(N=i+j)P_{(N=i+j)}(X=i) = \frac{\lambda^{i+j} e^{-\lambda}}{(i+j)!} \times \binom{i+j}{i} p^i q^{i+j-i}$$

On décompose le coefficient binomial en factorielles pour simplifier :

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{\lambda^{i+j} e^{-\lambda} p^i q^j}{(i+j)!} \times \frac{(i+j)!}{i!j!} = \frac{\lambda^{i+j} e^{-\lambda} p^i q^j}{i!j!}$$

5. On n' a pas la covariance ; comme on ne connaît pas le résultat et qu'on a des formules générales, on peut utiliser la définition sur la formule générale : on vien de calculer $P([X=i] \cap [Y=j])$ et :

$$\begin{aligned}
P(X=i)P(Y=j) &= \frac{(\lambda p)^i e^{\lambda p}}{i!} \times \frac{(\lambda q)^j e^{\lambda q}}{j!} = \frac{\lambda^{i+1} p^i q^j e^{\lambda p + \lambda q}}{i!j!} = \frac{\lambda^{i+1} p^i q^j e^{\lambda(p+q)}}{i!j!} \\
&= \frac{\lambda^{i+1} p^i q^j e^{\lambda}}{i!j!} = P([X=i] \cap [Y=j])
\end{aligned}$$

donc X et Y sont indépendantes.

Exercice 8.
Un secrétaire envoie un courrier nécessitant une réponse à n contacts ($n \geq 2$). On admet que les contacts répondent à tout message de façon indépendante et avec la probabilité p, ($p \in]0,1[$). On note X le nombre de réponses reçues. La secrétaire envoie alors un message de rappel aux $n - X$ contacts qui n'ont pas répondu. On note Y le nombre de réponses à ce deuxième message et $Z = X + Y$ le nombre total de réponses.

1. D'abord $X(\Omega) = \underline{0}; n]\!]$.

De plus X compte le nombre de succès ("obtenir une réponse", de probabilité p) dans une succession de n épreuves identiques et indépendantes, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

2. Z est le nombre de contacts qui ont répondu à la fin : il peut y en avoir entre 0 et n :

$$Z(\Omega) = [\![0; n]\!]$$

De plus on peut remarquer que $Z = 0$ signifie qu'aucun contact n'a répondu lors des deux tentatives donc :

$$(Z = 0) = [(X = 0) \cap (Y = 0)] \quad \text{et} \quad P(Z = 0) = P(X = 0)P_{(X=0)}(Y = 0)$$

Or sachant $(X = 0)$, Y compte le nombre de succès ("obtenir une réponse", de probabilité p) dans une succession de n épreuves identiques et indépendantes, donc $Y_{(X=0)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et :

$$P(Z = 0) = q^n \times q^n = q^{2n}.$$

$(Z = 1)$ signifie qu'on a eu une réponse sur les deux tentatives, qui peut avoir lieu à la première ou à la seconde donc :

$$(Z = 1) = [(X = 0) \cap (Y = 1)] \cup [(X = 1) \cap (Y = 0)]$$

Par incompatibilité de la réunion et probabilités composées on obtient :

$$P(Z = 1) = P(X = 0)P_{(X=0)}(Y = 1) + P(X = 1)P_{(X=1)}(Y = 0) = q^n \times \binom{n}{1} pq^{n-1} + \binom{n}{1} pq^{n-1} P_{(X=1)}(Y = 0).$$

Or sachant $(X = 1)$, Y compte le nombre de succès ("obtenir une réponse", de probabilité p) dans une succession de $n - 1$ épreuves identiques et indépendantes, donc $Y_{(X=01)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n - 1, p)$ et :

$$P(Z = 1) = npq^{2n-1} + npq^{n-1} \times q^{n-1} = npq^{2n-1} + npq^{2n-2} = npq^{2n-2}(1 + q).$$

3. Sachant $(X = i)$, Y compte le nombre de succès ("obtenir une réponse", de probabilité p) dans une succession de $n - i$ épreuves identiques et indépendantes, donc $Y_{(X=i)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n - i, p)$ et pour tout $j \in [\![0; n - i]\!]$:

$$P_{(X=i)}(Y = j) = \binom{n-i}{j} p^j q^{n-i-j}.$$

4. Pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $(Z = k) = (X + Y = k)$ dépend de deux variables aléatoires ; on applique les probabilités totales avec le système complet d'évènements $(X = i)_{i=0}^n$ on a :

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{n} P[(X = i) \cap (X + Y = k)] = \sum_{i=0}^{n} P[(X = i) \cap (Y = k - i)].$$

Or pour tout $i \geq k + 1$, on remarque que $Y = k - i$ est impossible car $k - i \leq k - (k + 1) = -1$ est négatif, donc Y ne peut prendre cette valeur. On en déduit que :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} P[(X = i) \cap (Y = k - i)] + \sum_{i=k+1}^{n} P(\emptyset) = \sum_{i=0}^{k} P[(X = i) \cap (Y = k - i)] + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \\ &= \sum_{i=0}^{k} P[(X = i) \cap (Y = k - i)]. \end{aligned}$$

5. Vérifions l'égalité demandée :

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \times \frac{(n-i)!}{(k-i)![(n-i)-(k-i)]!} = \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!}$$

d'une part, et d'autre part

$$\binom{n}{k}\binom{k}{i} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!} = \frac{n!}{(n-k)!i!(k-i)!}$$

donc ces quantités sont bien égales. Pour la loi de z, on a déjà vu que $Z(\Omega) = [\![0; n]\!]$, on calcule pour tout $k \in [\![0; n]\!]$:

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P[(X = i) \cap (Y = k - i)] = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P_{(X=i)}(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} q^{n-i-(k-i)}$$

On remplace les produit de coefficients binomiaux à l'aide de l'égalité prouvée juste avant, on obtient :

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}q^{n-i+n-k}p^k=\binom{n}{k}p^k\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}q^{2n-i-k}=\binom{n}{k}p^kq^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(q^{-1})^i$$

On fait apparaître une formule du binôme de Newton en multipliant par $1^{k-i}=1$ dans la somme **(astuce à retenir !)** :

$$\begin{aligned}P(Z=k) &= \binom{n}{k}p^kq^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(q^{-1})^i1^{k-i}=\binom{n}{k}p^kq^{2n-k}(1+q^{-1})^k\\ &= \binom{n}{k}p^kq^{2n-k}\left(\frac{1+q}{q}\right)^k=\binom{n}{k}\Big[p(1+q)\Big]^kq^{2n-2k}\\ &= \binom{n}{k}\Big[p(1+q)\Big]^k(q^2)^{n-k}.\end{aligned}$$

Il reste à prouver que $q^2=1-p(1+q)$: en effet (on par de la droite, plus compliquée) :

$$1-p(1+q)=1-(1-q)(1+q)=1-(1-q^2)=q^2$$

et en posant $p'=p(1+q)$ on obtient finalement :

$$P(Z=k)=\binom{n}{k}(p')^k(1-p')^{n-k}$$

donc $Z\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p')=\mathcal{B}(n,p[1+q])$.

Exercice 9. : **loi du min, loi du max**
Soit $p\in]0,1[$ et $q=1-p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, indépendantes, et suivant toutes les deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète s'obtient en sommant les probabilités de la loi, en écrivant l'inégalité comme une réunion d'égalités :

$$(X\leq k)=\bigcup_{i=1}^{k}(X=i)$$

et comme la réunion est incompatible,

$$P(X\leq k)=\sum_{i=1}^{k}P(X=i)=\sum_{i=1}^{k}q^{i-1}p=p\sum_{j=0}^{k-1}q^j=p\times\frac{1-q^k}{1-q}=1-q^k.$$

Ensuite on remarque que

$$(X>k)=\overline{(X\leq k)}\quad\text{donc}\quad P(X>k)=1-P(X\leq k)=1-(1-q^k)=q^k.$$

2. On note $Z=\sup(X,Y)$.
   (a) On remarque que pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a :

$$(Z\leq k)=[\sup(X,Y)\leq k]=(X\leq k)\cap(Y\leq k)$$

car pour que la plus grande des deux valeurs soit inférieure ou égale à k, il faut et il suffit que les deux le soient. On en déduit par indépendance de X et Y que :

$$P(Z\leq k)=P(X\leq k)P(Y\leq k)=[P(X\leq k)]^2=(1-q^k)^2$$

(b) Comme aucune formule de probabilités avec un $-$ n'est au programme, on réécrit cette égalité sous la forme :

$$P(Z=k)=P(Z\leq k)-P(Z\leq k-1)\Longleftrightarrow P(Z\leq k)=P(Z=k)+P(Z\leq k-1)$$

Or on sait que Z est une variable discrète, donc :

$$(Z\leq k)=(Z=k)\cup(Z<k)=(Z=k)\cup(Z\leq k-1)$$

et par incompatibilité de la réunion,

$$P(Z\leq k)=P(Z=k)+P(Z\leq k-1)\quad\text{donc}\quad P(Z=k)=P(Z\leq k)-P(Z\leq k-1).$$

(c) On ne déduit que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=P(Z\leq k)-P(Z\leq k-1)=(1-q^k)^2-(1-q^{k-1})^2=(1-q^k+1-q^{k-1})(1-q^k-1+q^{k-1})\\&=(2-q^k-q^{k-1})(q^{k-1}-q^k)=q^{k-1}(1-q)(2-q^k-q^{k-1}).\end{aligned}$$

3. On note $T=inf(X,Y)$.

(a) On remarque que pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a :

$$(T>k)=[\inf(X,Y)>k]=(X>k)\cap(Y>k)$$

car pour que la plus petite des deux valeurs soit supérieure à k, il faut et il suffit que les deux le soient. On en déduit par indépendance de X et Y que :

$$P(T>k)=P(X>k)P(Y>k)=[P(X>k)]^2=q^{2k}$$

(b) On va chercher à écrire $(T=k)$ avec les évènements $(T>i)$: on remarque :

$$(T>k)\cup(T=k)=(T\geq k)=(T>k-1)$$

donc par incompatibilité de la réunion :

$$P(T>k)+P(T=k)=P(T>k-1)\quad\text{donc}\quad P(T=k)=P(T>k-1)-P(T>k)$$

On utilise alors la formule de la question précédente : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$P(T=k)=q^{2(k-1)}-q^{2k}=q^{2k-2}-q^{2k}=q^{2k-2}(1-q^2).$$

(c) D'abord $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$, et la question appelle clairement à reconnaître une loi usuelle ; on fait donc apparaître une loi géométrique (la seule possible avec ce support) : pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$P(T=k)=(q^2)^{k-1}(1-q^2)$$

et on reconnaît bien la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.

Exercice 10.
Soit $n>0$; on considère n personnes qui se répartissent au hasard dans trois hôtels H_1, H_2 et H_3.
Pour tout $i\in[\![1;3]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.

1. Déterminer la loi des trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3, leurs espérances et leurs variances.
2. Déterminer la loi de X_1+X_2, son espérance et sa variance.
3. Calculer la covariance de X_1 et X_2 puis leur coefficient de corrélation linéaire.

1. D'abord $X_i(\Omega)=[\![0;n]\!]$, donc on teste la loi binomiale.

Chaque personne a une probabilité $\frac{1}{3}$ de se rendre dans l'hôtel i, donc X_i compte le nombre de succès ("Aller dans l'hôtel i") dans une succession de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes, et $X_i\hookrightarrow\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{3}\right)$ Enfin

$$E(X_i)=\frac{n}{3}\quad\text{et}\quad V(X_i)=\frac{2n}{9}.$$

2. $X_1 + X_2$ compte le nombre de personnes dans les hôtels H_1 et H_2, donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

   Chaque personne a une probabilité $\frac{2}{3}$ de se rendre dans l'un des deux hôtels H_1 et H_2, donc on compte le nombre de succès dans une succession de n épreuves de Bernouilli indépendantes et de paramètre $\frac{2}{3}$, et $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$. Enfin

$$E(X_1 + X_2) = \frac{2n}{3} \quad \text{et} \quad V(X_1 + X_2) = \frac{2n}{9}.$$

   Autre méthode : on écrit $(X_1 + X_2)(\Omega) = [\![0; n]\!]$, puis $X_1 + X_2 = n - X_3$, donc

$$P(X_1 + X_2 = k) = P(X_3 = n - k) = \binom{n}{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \binom{n}{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

   et on reconnaît $\mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$.

3. Aucune chance ici de calculer $E(XY)$ par le théorème de transfert. On passe par la formule de

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\operatorname{cov}(X_1, X_2).$$

   D'où

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \frac{V(X_1 + X_2) - V(X_1) - V(X_2)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{9} - \frac{2n}{9} - \frac{2n}{9}\right) = -\frac{n}{9}.$$

   Enfin

$$\rho(X_1, X_2) = -\frac{\frac{n}{9}}{\sqrt{\frac{2n}{9} \times \frac{2n}{9}}} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 11.
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.r. de Bernoulli mutuellement indépendantes, de même paramètre p.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Les variables X_i et X_{i+1} ne prennent que les valeurs 0 et 1, donc leur produit Y_i ne peut valoir que 0 ou 1 : $Y_i(\Omega) = \{0; 1\}$.

   On en déduit que Y_i suit une loi de Bernouilli, il reste à déterminer son paramètre $P(Y_i = 1)$. Or pour obtenir $X_i X_{i+1} = 1$, il faut que les deux soient égales à 1 (si l'une des deux vaut 0, le produit vaudra automatiquement 0) donc par indépendances des (X_i) :

$$(Y_i = 1) = (X_i = 1) \cap (X_{i+1} = 1) \quad \text{et} \quad P(Y_i = 1) = P(X_i = 1)P(X_{i+1} = 1) = p^2.$$

   On obtient donc que Y_i suit la loi de Bernouilli de paramètre p^2.

   Lorsque $|i - j| \geq 2$, donc $j \notin \{i - 1; i + 1\}$, les variables sont indépendantes par lemme des coalitions, avec Y_i qui ne dépend que de X_i et X_{i+1}, et Y_k que de X_j et X_{j+1}, distinctes de X_i et X_{i+1}.

   On s'intéresse enfin à l'indépendance de Y_i et Y_{i+1} : on cherche par exemple $P([Y_i = 1] \cap [Y_{i+1} = 1])$:

$$(Y_i = 1) \cap (Y_{i+1} = 1) = (X_i = 1) \cap (X_{i+1} = 1) \cap (X_{i+2} = 1)$$

   donc par indépendances des X_i,

$$P[(Y_i = 1) \cap (Y_{i+1} = 1)] = P(X_i = 1)P(X_{i+1} = 1)P(X_{i+2} = 2) = p^3 \quad \text{et} \quad P(Y_i = 1)P(Y_{i+1} = 1) = p^4$$

   donc Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes.

2. Pour l'espérance, la linéarité est toujours valable donc on obtient sans difficultés :

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p^2 = np^2.$$

Par contre la formule "simple" de la variance de la somme n'est valable que lorsque les variables sont indépendantes, ce qui n'est pas le cas ici. On doit donc écrire :

$$V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j} \mathrm{cov}(Y_i, Y_j).$$

Or la covariance de Y_i et Y_j est nulle dès que $j \notin \{i-1; i+1\}$ donc :

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} p^2(1-p^2) + \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) + \sum_{i=2}^{n-1}\Big[\mathrm{cov}(Y_i, Y_{i-1}) + \mathrm{cov}(Y_i, Y_{i+1})\Big] + \mathrm{cov}(Y_n, Y_{n-1}).$$

Calculons la covariance de (Y_i, Y_{i+1}) : par théorème de transfert

$$E(Y_iY_{i+1}) = \sum_{k=0}^{1}\sum_{l=0}^{1} k \times l \times P([Y_i = k] \cap [Y_{i+1} = l]) = 0 + 0 + 0 + 1 \times P([Y_i = 1] \cap [Y_{i+1} = 1]) = p^3.$$

On en déduit que

$$\mathrm{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = E(Y_iY_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p) = p^3q.$$

En remplaçant i par $i-1$ et par symétrie de la covariance on en déduit que

$$\mathrm{cov}(Y_i, Y_{i-1}) = \mathrm{cov}(Y_{i-1}, Y_i) = p^3q$$

puis :

$$\begin{aligned} V(S_n) &= np^2(1-p)(1+p) + p^3q + \sum_{i=2}^{n-1} 2p^3q + p^3q = np^2q(1+p) + 2(n-1)p^3q = p^2q[n(1+p) + 2(n-1)p] \\ &= p^2q[n(1+3p) - 2p]. \end{aligned}$$