TD 7- Intégration sur un segment

I. Calculs d'intégrales

Exercice 1.
Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^4 (\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}})dx, \qquad \int_0^1 2x^4 e^{-x^5} dx \qquad \int_0^1 t(1-t)^n dt, \qquad \int_0^t \sqrt{3x+1}dx,$$

$$\int_0^1 \frac{u^2}{5+u^3}du, \qquad \int_0^1 \frac{u^2}{(5+u^3)^2}du, \qquad \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{5+u^3}}du, \qquad \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx,$$

$$\int_1^x (1-t^2\ln(t))dt, \qquad \int_0^1 (x+1)e^{-x}dx, \qquad \int_0^4 |x-2|dx$$

Exercice 2.
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé :

1. $\int_0^1 x\sqrt{3x+1}dx,\ u = 3x+1$
2. $\int_1^4 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx,\ u = 1+\sqrt{x}$

Exercice 3.
Soit $a > 0$.

1. Soit f une fonction continue et paire sur $[-a; a]$. Montrer que $\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$.
2. Soit f une fonction continue et impaire sur $[-a; a]$. Montrer que $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

II. Suites définies par une intégrale

Exercice 4.
Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0.
2. (a) Etablir que la suite (I_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. (a) Justifier l'inégalité $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (b) En déduire que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
4. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$
   (b) Montrer que :
   $$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$$
   (c) En déduire un équivalent de I_n.

III Fonctions définies par une intégrale

Exercice 5.

1. Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J. Soit f continue sur J.
   (a) Soit F la fonction définie par :
   $$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$
   En utilisant une primitive G de f sur J, prouver que F est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
   (b) i. Soit $a \in J$, en déduire que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur J qui s'annule en a.

   ii. Exemple d'application : déterminer l'ensemble de définition et le sens de variations de F : $x \mapsto \int_e^x \frac{1}{\ln(t)}dt$ et de $G : x \mapsto \int_x^2 \ln(1+t^2)dt$.

Exercice 6.
Soit F définie par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)}$.

1. Montrer que F est définie sur $E =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur E et calculer $F'(x)$. Que peut-on en conclure ?
3. Vérifier ce résultat en calculant $F(x)$ directement.

Exercice 7.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\, dt$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Déterminer la dérivée de f sur son ensemble de définition et en déduire l'expression de f pour tout x.
c) Retrouver ce résultat à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 8.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Calculer $f'(x)$, pour $x \neq 0$.
4. Etudier la parité de f.
5. Etudier le signe de f.
6. Montrer : $\forall x > 0,\ f(x) \geq \frac{x}{\ln(1+4x^2)}$. En déduire la limite en $+\infty$ de $f(x)$.

IV Comparaison somme-intégrale

Exercice 9.
Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(t) = t\ln(t)$ et soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

1. Montrer les encadrements $(*)$: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k+1)$.
2. Ecrire $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)dt$ sous forme d'une seule intégrale.
3. En sommant les encadrements $(*)$, montrer : $S_n - n\ln(n) \leq \int_1^n f(t)dt \leq S_n$
4. En déduire un encadrement de S_n.
5. Calculer $\int_1^n f(t)dt$.
6. Déterminer un équivalent de S_n.

Exercice 10.
Remarque : on rappelle que la notation $\sqrt[n]{t}$ se nomme la "racine n-ième de t " et est définie par sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\sqrt[n]{t} = t^{\frac{1}{n}}$.
Il s'agit de la bijection réciproque de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par exemple $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$ car $3^3 = 27$; $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$ car $2^4 = 16$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $u_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

1. Montrer que $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{1; 2; \cdots; n-1\}$, $\frac{1}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$.
3. En déduire que $\forall n \geq 2$, $\ln(u_n) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq \ln(u_n) - \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}$.
4. Calculer $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx$
5. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 11.
Soit f une fonction continue et décroissante sur $[0, 1]$. On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (appelée somme de Riemann de f sur $[0, 1]$.
Le but de cet exercice est de prouver, dans ce cas particulier, le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 f(t)dt}$$

1. Démontrer que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\ dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. En sommant les inégalités ci-dessus, en déduire que $S_n - \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) \leq \int_0^1 f(x)\ dx \leq S_n$.
3. En déduire un encadrement de S_n, puis prouver la propriété demandée.

Exercice 12.
Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$.

a) Montrer que pour tout $k \in \{0; 1; 2; \cdots; n-1\}$, $\frac{1}{n} \sqrt[n]{2^k} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 2^t\ dt \leq \frac{1}{n} \sqrt[n]{2^{k+1}}$.
b) En déduire un encadrement de u_n.
c) Obtenir la limite de u_n.
d) Retrouver cette limite en calculant u_n en fonction de n.

Exercice 13.

1. Soit φ une fonction continue et croissante sur $[0; 1]$. Montrer que :
$$\forall x \in]0; 1], \qquad \int_0^x \varphi(t)dt \leq x \int_0^1 \varphi(t)dt$$
2. Soit f une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; 1], \qquad \frac{1}{x} \int_n^{n+x} g(t)dt \leq \int_n^{n+1} g(t)dt$$
3. En déduire que $\frac{1}{x} \sum\limits_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+x} g(t)dt \leq \int_0^N g(t)dt$.