TD 9 : intégrales généralisées

Exercice 1.
Vérifier si les intégrales généralisées suivantes sont convergentes et, le cas échéant, les calculer :

$$\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}, \quad \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t\ln(t)}, \quad \int_0^2 \frac{|t-1|}{\sqrt{t(2-t)}}dt, \quad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$$

(pour la dernière intégrale, on posera le changement de variable $u = \sqrt{x}$)

Exercice 2.
Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3 - 5t^2 + 1}{2t^5 + 2t^3 + t^2 + 1}dt, \quad \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{2^{t^2}}dt$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{t}dt, \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}}$$

Exercice 3.
1. Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$.
2. Trouver les réels a, b et c tels que $\forall t \geq 1$, $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$.
3. Calculer l'intégrale I.

Exercice 4.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

1. Calculer $\int_0^x f(t)\ dt$.
2. Montrer que la fonction f est paire.
3. Montrer la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$, puis de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$.
4. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3 f(t)$. En déduire la convergence de $\int_0^{+\infty} t\ f(t)\ dt$.
5. Justifier l'existence et donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$.

Exercice 5.
Moments de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x}\ dx$.

a) Montrer que I_n converge pour tout n.
b) Calculer I_0.
c) Montrer que $I_n = \frac{n}{\lambda} I_{n-1}$.
c) En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
d) En déduire l'existence et la valeur des moments d'ordre n et de la variance d'une variable X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 6.
Moments de la loi normale centrée réduite.

Soit, pour tout entier n, $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$, sous réserve de convergence.

1) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$ converge.
2) En déduire que I_n converge pour tout entier naturel n et donner sa valeur dans le cas où n est impair.
3)a) Cas $n = 2k$ pair : On pose $J_{2k}(a) = \int_0^a x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx$.
Trouver une relation de récurrence entre $J_{2k}(a)$ et $J_{2k-2}(a)$.
b) En déduire une relation de récurrence liant I_{2k} et I_{2k-2} .
c) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} I_0$.
d) En déduire la valeur des moments et de la variance d'une variable X suivant une loi normale centrée réduite.