TD 10 : variables à densité

Exercice 1.
Soit X une variable aléatoire réelle admettant pour fonction de répartition : $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)^3 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.
Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de X.

Exercice 2.
1) Soit $f : x \to \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que f est une densité de probabilité.
2) On note Y la variable aléatoire réelle dont f est une densité.
Que vaut $Y(\Omega)$? Déterminer la fonction de répartition de Y.
3) Calculer $P(Y \leq \frac{1}{3})$, $P(\frac{1}{4} \leq Y \leq 2)$, $P(Y \geq \frac{2}{3})$, $P(|Y| \leq \frac{1}{2})$, $P(|Y| \leq -2)$
4) Montrer que Y admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 3.
1) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de façon que $f : x \to \begin{cases} \frac{a}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ soit une densité d'une variable aléatoire X.
2) Déterminer la fonction de répartition de X.
3) Calculer $P(-1 < X < 3)$, $P(X > 2)$, $P(|X| \leq 1)$.
4) Montrer que X admet une espérance (et la calculer), mais pas de variance.

Exercice 4. : loi de Y=g(X)
Soit X une variable aléatoire à densité admettant une densité f_X.

1. Vérifier que $Y = -2X + 3$ est une variable à densité et exprimer une densité f_Y de Y en fonction de f_X.
2. Vérifier que $Z = e^X$ est une variable à densité et exprimer une densité f_Z de Z en fonction de f_X.
3. On supose $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$. Vérifier que $V = \sqrt{X}$ est une variable à densité et exprimer une densité f_V de V en fonction de f_X.
4. Vérifier que $U = X^2$ est une variable à densité et exprimer une densité f_U de U en fonction de f_X.

Exercice 5.
On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1. On considère $Y = |X|$. Calculer $E(Y)$ puis déterminer la loi de Y. Retrouver autrement la valeur de l'espérance.
2. On considère $Z = e^X$. Calculer $E(Z)$ puis déterminer une densité de Z. Retrouver autrement la valeur de l'espérance.

Exercice 6.
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. (a) Déterminer une densité de $Y = \sqrt{X}$.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
2. Déterminer une densité de $Z = X^2$.

Exercice 7.
Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$ et λ un réel strictement positif.

1. Déterminer la loi de $V = 1 - U$.
2. Déterminer la loi de $X = -\frac{\ln(1-U)}{\lambda}$.
3. En déduire une simulation informatique de la loi exponentielle de paramètre λ utilisant uniquement la fonction prédéfinie $rand()$.

Exercice 8.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ.
On définit les variables aléatoires $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.
1) Déterminer une densité g de U.
2) Reconnaître la loi de V. En déduire l'espérance et la variance de V.
3) Exprimer $U + V$ en fonction de X et Y. En déduire l'espérance de U.

Exercice 9.
Soient deux variables aléatoires réelles X et U définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi normale centrée réduite et U suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
On définit $Y = UX$.

1. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(Y \leq x) = \frac{1}{2}P(X \leq x) + \frac{1}{2}P(X \geq -x)$.
2. En déduire que Y suit une loi normale centrée réduite.
3. Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$.
4. En déduire que $cov(X, Y) = 0$.

Exercice 10.
Rappels : définition de la partie entière : Pour tout réel x, on appelle partie entière de x l'entier le plus proche de x par valeurs inférieure c'est-à-dire l'unique entier relatif noté $\lfloor x \rfloor$ vérifiant l'inégalité

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1}$$

Exemples : $\lfloor 2,83 \rfloor = 2$
$\lfloor -2,83 \rfloor = -3$
$\lfloor x \rfloor = -3 \Leftrightarrow -3 \leq x < -2$

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$ puis calculer $P(Y = k)$ $\forall k \in Y(\Omega)$
   (on pourra commencer par calculer $P(Y = 0)$ et $P(Y = 1)$ par exemple)
2. Vérifier que la variable $Z = Y + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. On définit maintenant la partie décimale de X par : $D = X - \lfloor X \rfloor$.
   (a) Justifier : $\forall t < 0,\ F_D(t) = 0$ et $\forall t \geq 1,\ F_D(t) = 1$.
   (b) Justifier l'égalité : $\forall t \in [0, 1[,\ (D \leq t) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [n \leq X \leq n + t]$.
   (faire un dessin. On pourra commencer par traduire $[D \leq \frac{1}{3}]$ par exemple)
   (c) En déduire : $\forall t \in [0, 1[,\ F_D(t) = \frac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}}$.
   (d) Vérifier que D est une variable à densité et donner une densité de D.

Exercice 11.
Utilisation des tables de la loi normale centrée réduite

1. Soit X suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer $P(X \leq -0,81)$, $P(|X| \leq 1,17)$.
2. Soit X suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer $t > 0$ tel que $P(|X| < t) = 0,95$.
3. Soit X suivant la loi $\mathcal{N}(8, 4)$. Calculer $P(X > 8,5)$, $P(6,5 < X < 10)$, $P_{[X>5]}(X > 6)$.
4. Soit X une variable aléatoire gaussienne. Déterminer l'espérance et la variance de X sachant :
   $$\begin{cases} P(X < -1) &= 0,025 \\ P(X > 3) &= 0,242 \end{cases}$$