TD 9 : correction

Exercice 1.

1. Puisqu'on demande de calculer l'intégrale en cas de convergence, il faut obligatoirement revenir à l'intégrale partielle, qu'on doit calculer pour ensuite chercher sa limite.

   La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t}}$ est continue sur $[3;+\infty[$ donc cette intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, on considère alors :

$$\begin{aligned}\int_3^x \frac{dt}{t\sqrt{t}} &= \int_3^x t^{-3/2}\,dt = \left[\frac{t^{-1/2}}{-1/2}\right]_3^x = \left[\frac{-2}{\sqrt{t}}\right]_3^x = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &\xrightarrow[t\to+\infty]{} -0 + \frac{2}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

   On en déduit que l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ est convergente et que :

$$\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^2}$ est continue sur $[3;+\infty[$ donc l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$. On considère donc :

$$\int_3^y \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$$

   On remarque que si $u = \ln(x)$, $u' = \frac{1}{x}$ donc on reconnaît la forme $\frac{u'}{u^2} = u'u^{-2}$:

$$\begin{aligned}\int_3^y \frac{dx}{x(\ln(x))^2} &= \left[\frac{(\ln(x))^{-1}}{-1}\right]_3^y = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_3^y = -\frac{1}{\ln(y)} + \frac{1}{\ln(3)} \\ &\xrightarrow[y\to+\infty]{} -0 + \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}.\end{aligned}$$

   On en déduit que l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$ est convergente et que :

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \frac{1}{\ln 3}.$$

3. La fonction intégrée est continue sur $]0;1[$ donc l'intégrale est généralisée en 0 et en 1. On étudie $\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\ln t}\,dt$ puis $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t\ln t}\,dt$.

$$\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\ln t}\,dt = [\ln(|\ln(t)|)]_x^{\frac{1}{2}} = -\ln(|\ln x|) + \ln(\ln(2)) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$$

   donc l'intégrale diverge en 0. Il n' y a donc pas besoin d'étudier l'autre côté ; faisons-le "pour la beauté du geste" :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{t\ln t}\,dt = [\ln(|\ln(t)|)]_{\frac{1}{2}}^x = \ln(|\ln x|) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[x\to 1]{} -\infty$$

   donc l'intégrale diverge aussi en 1.

4. La fonction intégrée est continue sur $]0;2[$ donc l'intégrale est généralisée en 0 et en 2. De plus pour traiter une valeur absolue il faut la retirer en étudiant le signe de l'intérieur. Or $t-1$ change de signe en 1, donc il faut séparer par relation de Chasles en 1.

On étudie donc séparément

$$\int_x^1 \frac{|t-1|}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt = \int_x^1 -\frac{t-1}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt$$

et

$$\int_1^y \frac{|t-1|}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt = \int_1^y \frac{t-1}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt.$$

On commence avec la première : en posant $u = t(2-t)$ on remarque que $u' = 1(2-t) + t(-1) = 2 - t - t = 2 - 2t = 2(1-t)$ donc on reconnaît la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$:

$$\int_x^1 -\frac{t-1}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt = \int_x^1 \frac{2(1-t)}{2\sqrt{t(2-t)}}\ dt = -\left[\sqrt{t(2-t)}\right]_x^1 = 1 - \sqrt{x(2-x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

donc la première intégrale converge et $\int_0^1 \frac{|t-1|}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt = 1$. D'autre part,

$$\int_1^y \frac{t-1}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt = \int_1^y -\frac{2(1-t)}{2\sqrt{t(2-t)}}\ dt = \left[-\sqrt{t(2-t)}\right]_1^y = -\sqrt{y(2-y)} + 1 \xrightarrow[y\to 2]{} 1$$

donc la deuxième intégrale converge et $\int_1^2 \frac{|t-1|}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt = 1$.

On en déduit finalement par relation de Chasles que l'intégrale $\int_0^2 \frac{|t-1|}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt$ converge et

$$\int_0^2 \frac{|t-1|}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt = \int_0^1 \frac{|t-1|}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt + \int_1^2 \frac{|t-1|}{\sqrt{t(2-t)}}\ dt = 1 + 1 = 2.$$

5. La fonction intégrée est continue sur $]0;1]$ donc on considère l'intégrale partielle suivante :

$$\int_y^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\ dx.$$

En suivant l'indication de l'énoncé, on pose le changement de variable (qui est bien de classe C^1 sur $[y;1]$) :

$$\begin{cases} u = \sqrt{x} \Longleftrightarrow x = u^2 \\ dx = 2u\ du \\ \text{Pour } x = y,\ u = \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ \text{Pour } x = 1,\ u = \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1 \end{cases}$$

et on obtient donc :

$$\int_y^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\ dx = \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{\ln(u^2)}{u} \times 2u\ du = \int_{\sqrt{y}}^1 (2\ln u) \times 2\ du = 4\int_{\sqrt{y}}^1 \ln u\ du.$$

On effectue alors une intégration par parties, en posant :

$$v = \ln(u) \quad \text{et} \quad w = u$$

qui sont de classe C^1 sur $[\sqrt{y};1]$ avec :

$$v' = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad w' = 1.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_y^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\ dx &= 4\int_{\sqrt{y}}^1 \ln u\ du = 4\left([\ln(u)\times u]_{\sqrt{y}}^1 - \int_{\sqrt{y}}^1 u \times \frac{1}{u}\ du\right) = 4\left(1\ln(1) - \sqrt{y}\ln(\sqrt{y}) - [u]_{\sqrt{y}}^1\right) \\ &= 4\left(-\sqrt{y} \times \frac{1}{2}\ln(y) - 1 + \sqrt{y}\right) \\ &\xrightarrow[y\to 0]{} 4(-0-1+0) = -4. \end{aligned}$$

(par croissances comparées, $\sqrt{y}\ln(y)$ tend vers 0 en 0).

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ converge et que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = -4.$$

Exercice 2.

1. Comme on ne demande pas la valeur des intégrales, on utilisera à chaque fois le théorème de comparaison lorsque les intégrales sont généralisées (si elles ne sont pas généralisées, il suffira de le dire pour obtenir la convergence...)

   La fonction intégrée est continue sur $[0;+\infty[$ (le dénominateur est une somme de termes positifs dont un terme est 1, donc il est supérieur à 1 et ne peut s'annuler) donc l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$.

   On cherche alors un équivalent de la fonction intégrée en ce point pour conclure :

   $$t^3 - 5t^2 + 1 = t^3\left(1 - \frac{5}{t} + \frac{1}{t^3}\right) \quad \text{et} \quad 2t^5 + 2t^3 + t^2 + 1 = 2t^5\left(1 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t^3} + \frac{1}{2t^5}\right)$$

   et

   $$\lim_{t\to+\infty}\left(1 - \frac{5}{t} + \frac{1}{t^3}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t^3} + \frac{1}{2t^5}\right) = 1$$

   donc

   $$t^3 - 5t^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} t^3 \quad \text{et} \quad 2t^5 + 2t^3 + t^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} 2t^5$$

   et enfin par produit d'équivalents :

   $$\frac{t^3 - 5t^2 + 1}{2t^5 + 2t^3 + t^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^3}{2t^5} = \frac{1}{2t^2}.$$

   La fonction est donc équivalente en $+\infty$ à $\frac{1}{2t^2}$ qui est positif donc elle est aussi positive au voisinage de $+\infty$, et comme (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2}$ converge, par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} \frac{t^3-5t^2+1}{2t^5+2t^3+t^2+1}\,dt$ est convergente.

2. La fonction intégrée est continue sur $[1;+\infty[$ car $1 + \frac{1}{x^2} \geqslant 1 > 0$ sur cet intervalle, et $x^2 \neq 0$. L'intégrale n'est donc généralisée qu'en $+\infty$. On y cherche un équivalent de la fonction intégrée :

   Comme $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, les équivalents usuels en 0 s'appliquent :

   $$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u \quad \text{donc} \quad \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

   Lest fonctions $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ et $\frac{1}{x^2}$ dont positives au voisinage de $+\infty$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc par théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\,dx$ est convergente.

3. En remarquant que $2^{t^2} = e^{t^2\ln 2}$, la fonction intégrée est continue sur $[1;+\infty[$ (le dénominateur ne s'annule jamais puisque c'est une exponentielle), donc l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$.

   N'ayant aucune somme à factoriser par son terme prépondérant et aucune forme de DL usuel (l'exponentielle est prise en une expression qui tend vers l'infini et pas 0), on ne peut pas trouver d'équivalent plus simple. On teste alors la négligeabilité devant $\frac{1}{t^2}$: on remarque que

   $$\frac{\frac{t^2}{e^{t^2\ln 2}}}{\frac{1}{t^2}} = t^4 e^{-t^2\ln 2} = e^{4\ln t - t^2\ln 2}.$$

   On cherche la limite dans l'exponentielle :

   $$4\ln t - t^2\ln 2 = -t^2\ln 2\left(1 - \frac{4\ln(t)}{t^2\ln 2}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$$

car par croissances comparées $\frac{\ln t}{t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, puis par somme et produits de limites. On en déduit par composition que :

$$\frac{\frac{t^2}{e^{t^2\ln 2}}}{\frac{1}{t^2}} = e^{4\ln t - t^2 \ln 2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

donc que $\frac{t^2}{2^{t^2}} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

De plus ces deux fonctions sont positives au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale de $\frac{1}{t^2}$ converge en $+\infty$ (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc par théorème de comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{2^{t^2}}\, dt$ est convergente.

Autre méthode, plus rapide, pour la négligeabilité : on remarque que pour tout $\alpha > 0$,

$$t^\alpha = o_{+\infty}(e^{t\ln 2})$$

donc avec $t^2 \to +\infty$, on peut écrire :

$$(t^2)^\alpha = o_{+\infty}(e^{t^2\ln 2})$$

et enfin

$$\frac{1}{e^{t^2\ln 2}} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right) \quad \text{donc} \quad \frac{t^2}{e^{t^2\ln 2}} = o_{+\infty}\left(\frac{t^2}{t^{2\alpha}}\right) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{2\alpha-2}}\right).$$

On cherche alors α tel que $2\alpha - 2 > 1 \iff \alpha > 3/2$: en posant $\alpha = 2$ par exemple, on obtient la négligeabilité de la fonction intégrée devant $1/t^2$ et on peut donc conclure.

4. La fonction intégrée est continue sur $]0;1]$ car $t \neq 0$ sur cet intervalle et $1+\sqrt{t} \geqslant 1 > 0$: l'intégrale n'est donc généralisée qu'en 0. On y cherche un équivalent :

   Comme $\sqrt{t} \to 0$, on peut utiliser l'équivalent usuel :

$$\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u \quad \text{donc} \quad \ln(1+\sqrt{t}) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$$

   Par quotient d'équivalents on en déduit alors que :

$$\frac{\ln(1+\sqrt{t})}{t} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}}.$$

   Les deux fonctions sont positives au voisinage de 0 et on sait que l'intégrale de $1/t^{1/2}$ converge en 0 (Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$) donc par théorème de comparaison $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{t}\, dt$ converge.

5. La fonction intégrée est continue sur $]0;1[$ donc l'intégrale est généralisée en 0 et en 1. La fonction intégrée est bien positive, on va appliquer deux fois le théorème de comparaison :
   — Au voisinage de 0 on a

$$\frac{1}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}} = \frac{t^{\frac{-1}{3}}}{\sqrt[3]{\sqrt{1-t}}}$$

   avec $\sqrt[3]{\sqrt{1-t}} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ donc

$$\frac{1}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}} \sim t^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$$

   et $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1/3}}\, dt$ est l'intégrale d'une fonction positive et converge comme intégrale de Riemann avec $\alpha = 1/3 < 1$.

   Par théorème de comparaison, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}}\, dt$ converge.
   — En 1 on a

$$\frac{1}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}} = \frac{t^{\frac{-1}{3}}}{(1-t)^{\frac{1}{6}}}$$

   avec $t^{\frac{-1}{3}} \xrightarrow[t\to 1]{} 1$ donc

$$\frac{1}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}} \sim \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{6}}}$$

et $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{6}}}\, dt$ converge comme intégrale de Riemann avec $\alpha = 1/6 < 1$.

Par théorème de comparaison, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}}\, dt$ converge.

Enfin par relation de Chasles, on en déduit que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t\sqrt{1-t}}}\, dt$ converge.

Exercice 3.

1. La fonction intégrée est continue sur $[1;+\infty[$ car $t > 0$ sur cet intervalle (pour ln) et $(1+t^2)^2 \neq 0$ car cette quantité est supérieur à 1.

   L'intégrale n'est donc généralisée qu'en $+\infty$: on y cherche un équivalent :

$$(1+t^2)^2 = \left(t^2\left[1+\frac{1}{t^2}\right]\right)^2 = t^4\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} t^4$$

   car $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2 = (1+0)^2 = 1$. On en déduit par produit d'équivalents que :

$$\frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2t\ln t}{t^4} = \frac{2\ln t}{t^3}.$$

   Or on sait par croissances comparées que pour tout $\alpha > 0$, $\ln t = o_{+\infty}(t^\alpha)$ donc par produit :

$$\frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln t}{t^3} = o_{+\infty}\left(\frac{2t^\alpha}{t^3}\right) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{3-\alpha}}\right).$$

   On cherche alors α tel que $3-\alpha > 1 \iff \alpha < 2$: par exemple pour $\alpha = 1$, on obtient que

$$\frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

   Ces deux fonctions sont positives au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale de $1/t^2$ converge en $+\infty$ (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc par théorème de comparaison l'intégrale I converge.

2. On met ces deux quantités au même dénominateur pour identifier :

$$\frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2} = \frac{a(1+t^2)+(bt+c)t}{t(1+t^2} = \frac{(a+b)t^2+ct+a}{t(1+t^2)}$$

   On en déduit le système :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-1 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}$$

   donc on en déduit que :

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

3. Avant d'utiliser la question précédente, qui doit bien servir à quelque chose mais qui ne semble pas s'appliquer pour le moment, la présence de ln nous guide vers une intégration par parties. Il faut donc revenir à l'intégrale partielle : on considère

$$\int_1^x \frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}$$

   et on pose, en remarquant la forme $\frac{w'}{w^2}$ dans $\frac{2t}{(1+t^2)^2}$:

$$u = \ln t \quad \text{et} \quad v = -\frac{1}{1+t^2}$$

   qui sont de classe C^1 sur $[1;x]$ avec :

$$u' = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v' = \frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Par intégration par parties on en déduit que :

$$\int_1^x \frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}\ dt = \left[-\frac{\ln t}{1+t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\ dt.$$

En utilisant à présent la question 2 on peut poursuivre :

$$\int_1^x \frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}\ dt = -\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\ln 1}{2} + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)\ dt.$$

Par linéarité de l'intégrale on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{2t\ln t}{(1+t^2)^2}\ dt &= -\frac{\ln x}{1+x^2} + \int_1^x \frac{1}{t}\ dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{2t}{1+t^2}\ dt = -\frac{\ln x}{1+x^2} + [\ln t]_1^x - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_1^x \\
&= -\frac{\ln x}{1+x^2} + \ln x - \ln 1 - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2) - \ln 2\right] \\
&= -\frac{\ln x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + \ln x + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2\left[1+\frac{1}{x^2}\right]\right) \\
&= -\frac{\ln x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + \ln x + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(2\ln x + \ln\left[1+\frac{1}{x^2}\right]\right) \\
&= -\frac{\ln x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + \ln x + \frac{\ln 2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\
&\xrightarrow[x\to+\infty]{} -0 + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\times\ln(1) = \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

(avec une croissance comparée dans le premier quotient) donc on en déduit (on a déjà la convergence) que $I = \frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 4.

1. On reconnaît la forme $\frac{v'}{v^2}$ donc :

$$\int_0^x f(t)\ dt = \left[-\frac{1}{e^t+1}\right]_1^x = -\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{2}.$$

2. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0, de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{1}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)^2} = \frac{1}{e^x\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x)$$

donc la fonction f est paire.

3. On a vu que

$$\int_0^x f(t)\ dt = -\frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

donc $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$.

Par parité $\int_{-\infty}^0 f(t)\ dt$ converge et vaut aussi $\frac{1}{2}$ donc par relation de Chasles $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.

4. On cherche la limite en factorisant les sommes par le terme prépondérant :

$$t^3 f(t) = \frac{t^3 e^t}{\left(e^t(1+e^{-t})\right)^2} = \frac{t^3}{e^t(1+e^{-t})^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{t^3}{e^t} = 0$ par croissances comparées, et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^{-t})^2 = 1$.

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$,

$$t^3 f(t) = o_{+\infty}(1) \quad \text{donc} \quad t\ f(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Comme f est positive et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est l'intégrale d'une fonction positive et converge, $\int_0^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ converge par théorème de comparaison.

5. La fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire car son domaine de définition $\mathbb{R}$ est centré en 0 et par parité de f :

$$(-t)f(-t) = -tf(-t) = -tf(t)$$

Par imparité $\int_{-\infty}^{0} t\ f(t)\ dt$ converge et vaut $-\int_0^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ donc par relation de Chasles $\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ converge également et vaut 0.