TD 11 : fonctions de deux variables

Exercice 1.
Pour chacune des fonctions suivantes :
a) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f sur $\mathbb{R}^2$.
b) Déterminer les extremas locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

1. f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy(x+y-1)$.
2. f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Exercice 2.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x,y) = x\,e^{x\left(y^2+1\right)}$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f
   (b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
3. (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.
4. (a) Montrer que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x,y) \geq x\,e^x$.
   (b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\,(x) = x\,e^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

1. On considère la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^\times$ par $g(x) = \ln x + 2x + 1$.
   (a) Etudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
   (b) En déduire qu'il existe un unique réel α, élément de $\left]0; \dfrac{1}{e}\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x(\ln x + x + y^2)$$
   (a) Déterminer le seul point critique de f, c'est à dire le seul couple de $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
   (b) Vérifier que f présente un minimum relatif m en ce point.
   (c) Montrer que $m = -\alpha(\alpha+1)$.

Exercice 4.
On considère la fonction f définie, pour tout couple (x,y) de l'ouvert $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par :
$$f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1. Montrer que, pour tout couple (x,y) de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, on a :
$$f(x,y) = 2 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy}.$$
2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
3. Montrer que f possède une infinité de points critiques et les déterminer.

4. Déterminer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que ces dernières ne permettent pas de conclure à l'existence d'un extremum local de f sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
5. (a) Comparer les réels $(x+y)^2$ et $4xy$.
   (b) En déduire que f admet sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un minimum global en tous ses points critiques et donner sa valeur.
6. Soit g la fonction définie pour tout (x,y) de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par :

$$g(x,y) = 2\ln(x+y) - \ln x - \ln y.$$

   Montrer que : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ g(x,y) \geq 2\ln 2$.

Exercice 5.
Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} (1+y)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}\right) = 0 \\ (1+x)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\right) = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \\ \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \\ \frac{2(x+y)}{1+(x+y)^2} = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases}$

Exercice 6.
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1, R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1, P_2 et P_3. On a donc $P_1+P_2+P_3 = 1$ et on admet que, pour tout i de $\{1,2,3\}$, $0 < P_i < 1$.
On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.
Pour tout i de $\{1,2,3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon.
On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. (a) Justifier soigneusement que $X = X_1 + X_2 + X_3$.
   (b) Donner la loi de X_i, pour tout i de $\{1,2,3\}$.
   (c) En déduire l'espérance de X, notée $E(X)$.
   La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local. Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n$.
2. (a) On pose $P_1 = x$ et $P_2 = y$. Vérifier que $E(X) = f(x,y)$.
   (b) Montrer que f est une fonction de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,1[$.
   (c) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (d) Démontrer que f présente un unique extremum local et donner sa nature.
   (e) Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.