TD 11 : correction

Exercice 1.

1. (a) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme et produit de fonctions coordonnées et constantes qui sont de classe C^2.

$$\partial_1(f)(x,y) = y \times (x+y-1) + xy \times 1 = y(x+y-1+x) = y(2x+y-1)$$

et :

$$\partial_2(f)(x,y) = x(2y+x-1).$$

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = y\times 2 = 2y \ , \ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 1\times(2x+y-1)+y\times 1 = 2x+2y-1 \ , \ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 2x.$$

(b) Cherchons les points critiques de f :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(2x+y-1) = 0 \\ x(2y+x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x(2y+x-1) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x+y-1 = 0 \\ x(2y+x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1-2x \\ x(2y+x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1-2x \\ x(2-4x+x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1-2x \\ x(1-3x) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1-2x \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1-2x \\ 1-3x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1-2/3 = 1/3 \\ x = 1/3 \end{cases}$$

donc les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1/3,1/3)$.

Pour chaque point critique, on calcule la matrice Hessienne en ce point puis ses valeurs propres et on conclut selon le signe des valeurs propres.

— Au point $(0,0)$, on en déduit que :

$$\partial^2_{1,1}(f)(0,0) = 0 \ , \ \partial^2_{1,2}(f)(0,0) = -1 \ , \ \partial^2_{2,2}(f)(0,0) = 0 \quad \text{donc} \quad \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

dont on cherche les valeurs propres, c'est-à-dire les valeurs de λ pour lesquelles $A_1 - \lambda I$ n'est pas inversible :

$$A_1 - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \iff (L_1 \leftrightarrow L_2) \begin{pmatrix} -1 & -\lambda \\ -\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff (L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1) \begin{pmatrix} -1 & -\lambda \\ 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible si et seulement si :

$$\lambda^2 - 1 = 0 \iff (\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \iff \lambda \in \{-1;1\}$$

donc les deux valeurs propres de $\nabla^2(f)(0,0)$ sont de signes opposés, $(0,0)$ n'est donc pas un extremum local (c'est un point-selle).

— Au point $(1,0)$, on en déduit que :

$$\partial^2_{1,1}(f)(1,0) = 0 \ , \ \partial^2_{1,2}(f)(1,0) = 1 \ , \ \partial^2_{2,2}(f)(1,0) = 2 \quad \text{donc} \quad \nabla^2(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_2$$

dont on cherche les valeurs propres, c'est-à-dire les valeurs de λ pour lesquelles $A_2 - \lambda I$ n'est pas inversible :

$$A_2 - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \iff (L_1 \leftrightarrow L_2) \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff (L_2 \leftarrow L_2 - (2-\lambda)L_1) \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1+\lambda(2-\lambda) \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible si et seulement si :

$$1 + \lambda(2-\lambda) = 0 \iff -\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

donc le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, et les racines, qui sont donc les valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,0)$, sont :

$$\lambda_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{-2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{-2}$$

λ_1 est strictement positif comme quotient de deux facteurs strictement négatifs, pour λ_2 il faut le signe du numérateur :

$$-2+\sqrt{8} > 0 \iff -2 > -\sqrt{8} \iff 2 < \sqrt{8} \iff 2^2 < 8$$

ce qui est bien vrai, donc le numérateur $-2+\sqrt{8}$ est strictement positif, donc λ_2 est strictement négatif.

Enfin les deux valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,0)$ sont de signes opposés, $(0,0)$ n'est donc pas un extremum local (c'est un point-selle).

— Au point $(0,1)$, on en déduit que :

$$\partial^2_{1,1}(f)(0,1) = 2 \ , \ \partial^2_{1,2}(f)(0,1) = 1 \ , \ \partial^2_{2,2}(f)(0,1) = 0 \quad \text{donc} \quad \nabla^2(f)(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A_3$$

dont on cherche les valeurs propres, c'est-à-dire les valeurs de λ pour lesquelles $A_3 - \lambda I$ n'est pas inversible :

$$A_3 - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \iff (L_1 \leftrightarrow L_2) \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff (L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1) \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1+\lambda(2-\lambda) \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible si et seulement si :

$$1 + \lambda(2-\lambda) = 0 \iff -\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

On reconnaît la même équation que pour le point critique $(1,0)$: les valeurs propres sont donc les mêmes et sont à nouveau de signes opposés : $(0,1)$ n'est pas un extremum local, c'est un point-selle.

— Au point $(1/3, 1/3)$, on en déduit que :

$$\partial^2_{1,1}(f)(1/3,1/3) = 2/3 \ , \ \partial^2_{1,2}(f)(1/3,1/3) = 1/3 \ , \ \partial^2_{2,2}(f)(1/3,1/3) = 2/3$$

donc

$$\nabla^2(f)(1/3,1/3) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = A_4$$

dont on cherche les valeurs propres, c'est-à-dire les valeurs de λ pour lesquelles $A_4 - \lambda I$ n'est pas inversible :

$$A_4 - \lambda I = \begin{pmatrix} 2/3-\lambda & 1/3 \\ 1/3 & 2/3-\lambda \end{pmatrix} \iff (L_1 \leftrightarrow L_2) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3-\lambda \\ 2/3-\lambda & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{matrix} (L_1 \leftarrow 3L_1) \\ (L_2 \leftarrow 3L_2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2-3\lambda \\ 2-3\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff (L_2 \leftarrow L_2 - (2-3\lambda)L_1) \begin{pmatrix} 1 & 2-3\lambda \\ 0 & 1-(2-3\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible si et seulement si :

$$1-(2-3\lambda)^2 = 0 \iff \Big[1-(2-3\lambda)\Big] \times \Big[1+(2-3\lambda)\Big] = 0 \iff (-1+3\lambda)(3-3\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1/3; 1\}$$

donc les deux valeurs propres de $\nabla^2(f)(1/3, 1/3)$ sont strictement positives, $(1/3, 1/3)$ est donc un minimum local de f.

2. (a) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme et produit de fonctions coordonnées et constantes qui sont de classe C^2.

$$\partial_1(f)(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = 6xy - 12.$$

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 6x \quad , \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 6y \quad , \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 6x.$$

(b) On résout alors le système :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ y \neq 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0 \\ y \neq 0 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0 \\ y \neq 0 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{y^4 - 5y^2 + 4}{y^2} = 0 \\ y \neq 0 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y^4 - 5y^2 + 4 = 0 \\ y \neq 0 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

On reconnaît une équation bicarrée en y, on pose alors $Y = y^2$ pour résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Y = y^2 \\ Y^2 - 5Y + 4 = 0 \\ y \neq 0 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

Le discriminant vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$, puis les racines :

$$Y_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y)=0 \\ \partial_2(f)(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} Y=y^2 \\ Y=1 \quad \text{ou} \quad Y=4 \\ y\neq 0 \\ x=\frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y^2=1 \\ y\neq 0 \\ x=\frac{2}{y} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y^2=4 \\ y\neq 0 \\ x=\frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{y^2}=1 \\ y\neq 0 \\ x=\frac{2}{y} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sqrt{y^2}=2 \\ y\neq 0 \\ x=\frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |y|=1 \\ y\neq 0 \\ x=\frac{2}{y} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} |y|=2 \\ y\neq 0 \\ x=\frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y=-1 \\ x=-2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=-1 \end{cases}$$

donc les points critiques de f sont $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(1,2)$ et $(-1,-2)$.

Pour chaque point critique, on calcule la matrice Hessienne en ce point puis ses valeurs propres et on conclut selon le signe des valeurs propres.

— Au point $(2,1)$, on en déduit que :

$$\partial^2_{1,1}(f)(2,1)=12 \ , \ \partial^2_{1,2}(f)(2,1)=6 \ , \ \partial^2_{2,2}(f)(2,1)=12 \quad \text{donc} \quad \nabla^2(f)(2,1)=\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}=A_1$$

dont on cherche les valeurs propres, c'est-à-dire les valeurs de λ pour lesquelles $A_1-\lambda I$ n'est pas inversible :

$$A_1-\lambda I=\begin{pmatrix} 12-\lambda & 6 \\ 6 & 12-\lambda \end{pmatrix} \iff (L_1 \leftrightarrow L_2) \begin{pmatrix} 6 & 12-\lambda \\ 12-\lambda & 6 \end{pmatrix}$$

$$\iff (L_2 \leftarrow 6L_2-(12-\lambda)L_1) \begin{pmatrix} 6 & 12-\lambda \\ 0 & 36-(12-\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible si et seulement si :

$$36-(12-\lambda)^2=0 \iff \Big[6-(12-\lambda)\Big]\times\Big[6+(12-\lambda)\Big]=0 \iff (\lambda-6)(18-\lambda) \iff \lambda\in\{6;18\}$$

donc les deux valeurs propres de $\nabla^2(f)(2,1)$ sont strictement positives, $(2,1)$ est minimum local de f.

— Au point $(-2,-1)$, on en déduit que :

$$\partial^2_{1,1}(f)(-2,-1)=-12 \ , \ \partial^2_{1,2}(f)(-2,-1)=-6 \ , \ \partial^2_{2,2}(f)(-2,-1)=-12$$

donc

$$\nabla^2(f)(-2,-1)=\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}=A_2$$

dont on cherche les valeurs propres ; on remarque que $A_2=-A_1$ donc en posant $A_1=PD_1P^{-1}$ avec $D_1=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ on a :

$$A_2=-PD_1P^{-1}=P(-D_1)P^{-1}=P\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}P^{-1}=PD_2P^{-1}$$

est semblable à D_2, donc a les mêmes valeurs propres que D_2, qui sont ses valeurs diagonales puisque D_2 est diagonale, donc -6 et -18.

Les deux valeurs propres de $\nabla^2(f)(-2,-1)$ sont strictement négatives, $(-2,-1)$ est maximum local de f.

— Au point $(1,2)$, on en déduit que :

$$\partial^2_{1,1}(f)(1,2) = 6 \ , \ \partial^2_{1,2}(f)(1,2) = 12 \ , \ \partial^2_{2,2}(f)(1,2) = 6 \quad \text{donc} \quad \nabla^2(f)1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = A_3$$

dont on cherche les valeurs propres, c'est-à-dire les valeurs de λ pour lesquelles $A_3 - \lambda I$ n'est pas inversible :

$$A_3 - \lambda I = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 12 \\ 12 & 6-\lambda \end{pmatrix} \iff (L_1 \leftrightarrow L_2) \begin{pmatrix} 12 & 6-\lambda \\ 6-\lambda & 12 \end{pmatrix}$$

$$\iff (L_2 \leftarrow 12L_2 - (6-\lambda)L_1) \begin{pmatrix} 12 & 6-\lambda \\ 0 & 144-(6-\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible si et seulement si :

$$144-(6-\lambda)^2 = 0 \iff \Big[12-(6-\lambda)\Big] \times \Big[12+(6-\lambda)\Big] = 0 \iff (\lambda+6)(18-\lambda) \iff \lambda \in \{-6;18\}$$

donc les deux valeurs propres de $\nabla^2(f)(1,2)$ sont de signes opposés, donc $(1,2)$ n'est pas un extremum local de f, c'est un point-selle.

— Au point $(-1,-2)$, on en déduit que :

$$\partial^2_{1,1}(f)(-1,-2) = -6 \ , \ \partial^2_{1,2}(f)(-1,-2) = -12 \ , \ \partial^2_{2,2}(f)(-1,-2) = -6$$

donc

$$\nabla^2(f)(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} = A_4$$

dont on cherche les valeurs propres ; on remarque que $A_4 = -A_3$ donc en posant $A_3 = PD_3P^{-1}$ avec $D_1 = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ on a :

$$A_4 = -PD_3P^{-1} = P(-D_3)P^{-1} = P\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}P^{-1} = PD_4P^{-1}$$

est semblable à D_4, donc a les mêmes valeurs propres que D_4, qui sont ses valeurs diagonales puisque D_4 est diagonale, donc 6 et -18.

donc les deux valeurs propres de $\nabla^2(f)(-1,-2)$ sont de signes opposés, donc $(-1,-2)$ n'est pas un extremum local de f, c'est un point-selle.

Exercice 2.

1. La fonction $(x,y) \mapsto x(y^2+1)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $X \mapsto e^X$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ donc par composition $(x,y) \mapsto e^{x(y^2+1)}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

   De plus $(x,y) \mapsto x$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ donc par produit f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2. (a) f est de classe C^2 donc les deux dérivées partielles existent, et :

$$\begin{aligned} \partial_1(f)(x,y) &= 1 \times e^{x(y^2+1)} + x \times (y^2+1)e^{x(y^2+1)} \\ &= (xy^2+x+1)e^{x(y^2+1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2(f)(x,y) &= x \times (2xy) \times e^{x(y^2+1)} \\ &= 2x^2ye^{x(y^2+1)}. \end{aligned}$$

   (b) Pour qu'il y ait un extremum local en (x,y) il faut que ce soit un point critique donc on résout le système :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (xy^2+x+1)e^{x(y^2+1)} = 0 \\ 2x^2ye^{x(y^2+1)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy^2+x+1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation est équivalente à $x = 0$ ou $y = 0$, ce qui donne deux systèmes qui peuvent mener à des solutions :

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} xy^2 + x + 1 = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} 1 = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

qui est absurde, ou encore :

$$(2) \left\{ \begin{array}{c} xy^2 + x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = -1 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Le seul point critique, c'est-à-dire le seul point où f peut présenter un extremum local, est $A(-1; 0)$.

3. (a) f est de classe C^2 donc les trois dérivées partielles secondes existent et :

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) &= (y^2+1)e^{x(y^2+1)} + (xy^2+x+1) \times (y^2+1)e^{x(y^2+1)} \\ &= [(y^2+1)\ (xy^2+x+2)]e^{x(y^2+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^2_{2,2}(x,y) &= 2x^2 \left(1 \times e^{x(y^2+1)} + y \times (2xy)e^{x(y^2+1)}\right) \\ &= 2x^2 e^{x(y^2+1)}(1+2xy^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,2}(x,y) &= f''_{y,x}(x,y) = 2y \times 2xe^{x(y^2+1)} + 2x^2y \times (y^2+1)e^{x(y^2+1)} \\ &= 2xye^{x(y^2+1)}(2+xy^2+x) \end{aligned}$$

(b) Au point critique $(-1, 0)$ on a :

$$\partial^2_{1,1}(f)(-1,0) = e^{-1} \quad , \quad \partial^2_{2,2}(f)(-1,0) = 2e^{-1} \quad \text{et} \quad \partial^2_{1,2}(f)(-1,0) = 0$$

donc

$$\nabla^2(f)(-1,0) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

qui est diagonale donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, tous deux strictement positifs donc il y a bien un minimum local au point A, égal à

$$f(-1,0) = -e^{-1}.$$

4. (a) Etudions le signe de la différence :

$$f(x,y) - xe^x = xe^x \left(e^{xy^2} - 1\right) \quad \text{qui est encore du signe de } x\left(e^{xy^2} - 1\right)$$

Premier cas : $x \geqslant 0$, y quelconque, alors :

$$xy^2 \geqslant 0 \quad \text{donc par croissance de exp} \quad e^{xy^2} \geqslant e^0 = 1 \quad \text{et} \quad e^{xy^2} - 1 \geqslant 0$$

donc on obtient par produit :

$$\forall x \geqslant 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) - xe^x \geqslant 0$$

Deuxième cas : $x < 0$, y quelconque alors :

$$xy^2 < 0 \quad \text{donc par croissance de exp} \quad e^{xy^2} < e^0 = 1 \quad \text{et} \quad e^{xy^2} - 1 < 0$$

donc on obtient par produit :

$$\forall x < 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x,y) - xe^x > 0$$

et en rassemblant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geqslant xe^x$$

(b) g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions de classe C^∞ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

qui est strictement positive pour $x > -1$, nulle en -1 et strictement négative pour $x < -1$;

La fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty; -1]$ et strictement croissante sur $[-1; +\infty[$.

Elle admet donc un minimum en $x = -1$, égal à $-e^{-1}$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) \geqslant -e^{-1}$$

et enfin : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) \geqslant g(x) \geqslant -e^{-1} = f(-1, 0)$$

et la fonction f admet donc un minimum global égal à $-e^{-1}$ au point $A(-1, 0)$.

Exercice 3.

1. (a) g est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0 \quad \text{sur} \quad]0; +\infty[.$$

On en déduit que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

De plus

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

par somme de limites.

(b) g est continue et strictement croissante, donc d'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{x \to 0^+} g(x); \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[= \mathbb{R}$, et l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$, car $0 \in \mathbb{R}$.

On a bien $\alpha > 0$, et de plus

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \frac{2}{e} + 1 = -1 + \frac{2}{e} - 1 = \frac{2}{e} > 0 = g(\alpha)$$

et par stricte croissance de f on a

$$\frac{1}{e} > \alpha \quad \text{et finalement } 0 < \alpha < \frac{1}{e}.$$

2. (a) f est de classe C^2 comme somme de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$. Calculons les dérivées partielles premières :

$$\partial_1(f)(x, y) = \ln x + x + y^2 + x\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \ln x + x + y^2 + 1 + x = \ln x + 2x + y^2 + 1$$

et

$$\partial_2(f)(x, y) = x \times 2y = 2xy.$$

Comme x est différent de 0,

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y)=0 \\ \partial_2(f)(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln x+2x+y^2+1=0 \\ 2xy=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln x+2x+y^2+1=0 \\ x=0 \text{ (absurde) , ou } y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ln x+2x+1=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} g(x)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \end{cases}$$

donc le seul point critique de f est le point $(\alpha;0)$.

(b) Calculons les dérivées secondes de f :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y)=\frac{1}{x}+2 \quad , \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y)=2x \quad \text{ et } \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y)=2y.$$

Au point $(\alpha;0)$ on calcule la matrice Hessienne :

$$\nabla^2(f)(\alpha;0)=\begin{pmatrix} 2+\frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres (la matrice est diagonale) sont ses éléments diagonaux : $2+\frac{1}{\alpha}$ et α.

Les deux valeurs propres sont strictement positives car $\alpha>0$, donc f admet au point $(\alpha;0)$ un minimum local.

(c) On calcule :

$$\begin{aligned} m &= f(\alpha,0)=\alpha(\ln\alpha+\alpha+0^2)=\alpha(\ln\alpha+2\alpha+1-\alpha-1)=\alpha(g(\alpha)-\alpha-1)=\alpha(-\alpha-1) \\ &= -\alpha(\alpha+1) \end{aligned}$$

Exercice 4.

1. Pour comparer, on factorise ou on développe tout de part et d'autre ; ici on va factoriser pour obtenir la dernière expression :

$$f(x,y)=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=(x+y)\left(\frac{y+x}{xy}\right)=\frac{(x+y)^2}{xy}$$

et

$$2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{2xy+y^2+x^2}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}=f(x,y)$$

On pouvait donc également développer au maximum toutes les expressions puis mettre au même dénominateur, pour obtenir la même chose à chaque fois.

2. Pour $x\neq 0$ et $y\neq 0$ $(x,y)\mapsto\frac{1}{x}$ et $(x,y)\mapsto\frac{1}{y}$ dont de classe C^2 donc f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. comme somme et produit de fonctions de classe C^2.

3. (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y)=0 \\ \partial_2(f)(x,y)=0 \end{cases}$$

et on calcule les dérivées partielles à partir de la seconde écriture :

(Ce choix est moins anodin qu'il n'y paraît : a priori, il vaut beaucoup mieux choisir l'expression la plus factorisée possible pour dériver, afin d'avoir des dérivées le plus factorisées possibles dans l'optique de la résolution du système. En fait, on calcule une dérivée plus complexe pour se faciliter le système. Mais ici, même avec la dérivée la plus simple, le système est tellement facile que cela ne change rien.)

$$\partial_1(f)(x,y) = \frac{-y}{x^2} + \frac{1}{y} = \frac{-y^2+x^2}{x^2y} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} = \frac{y^2-x^2}{x^2y}$$

Donc (x,y) est un point critique $\iff x^2 = y^2 \iff x = \pm y \iff x = y$ car $y > 0$ et $x > 0$

f possède donc une infinité de points critiques :

$$\{(x,x) \mid x > 0\}$$

4. On calcule les dérivées partielles secondes et avec le théorème de Schwartz :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \frac{2y}{x^3} \quad , \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \frac{2x}{y^3}$$

et en (x,x) on a

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,x) = \frac{2}{x^2} \quad , \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,x) = -\frac{2}{x^2} \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,x) = \frac{2}{x^2}$$

donc

$$\nabla^2(f)(x,x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^2} & -\frac{2}{x^2} \\ -\frac{2}{x^2} & \frac{2}{x^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{x^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas inversible car les deux lignes sons colinéaires (opposées) donc 0 est valeur propre de $\nabla^2(f)(x,x)$: on ne peut donc pas conclure à l'existence d'extremum local au point (x,x).

5. (a) On calcule leur différence :

$$(x+y^2) - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0$$

Donc pour tout x et y réels :

$$(x+y^2) \geqslant 4xy$$

(b) Calculons $f(x,x)$:

$$f(x,x) = 2 + \frac{x}{x} + \frac{x}{x} = 4.$$

De plus d'après la question précédente, en divisant par $xy > 0$, on a pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$:

$$\frac{(x+y)^2}{xy} \geqslant 4$$

Et comme en $f(x,x) = 4$, on a donc pour tout $x_0 \in]0;+\infty[$ et pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$:

$$f(x_0,x_0) \leqslant f(x,y)$$

D'où f admet sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un minimum global qui vaut 4 en tout (x_0,x_0) avec $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

6. On fait apparaître f :

$$g(x,y) = 2\ln(x+y) - \ln x - \ln y. = \ln\left(\frac{(x+y)^2}{xy}\right)) = \ln\Big(f(x,y)\Big)$$

On a

$$f(x,y) \geqslant 4$$

et ln est croissante sur $]0;+\infty[$ donc :

$$g(x,y) = \ln(f(x,y)) \geqslant \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln 2$$

Exercice 5.

1.

$$\begin{cases} (1+y)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x^2}\right)=0 \\ (1+x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\right)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+y=0 \\ (1+x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\right)=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{1}{y}-\frac{1}{x^2}=0 \\ (1+x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\right)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-1 \\ (1+x)\left(\frac{1}{x}-1\right)=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{x^2-y}{yx^2}=0 \\ (1+x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\right)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-1 \\ 1+x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-1 \\ \frac{1}{x}-1=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2-y=0 \\ x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ (1+x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\right)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-1 \\ \frac{1-x}{x}=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=x^2 \\ x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ (1+x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}\right)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-1 \\ x\neq 0 \\ 1-x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=x^2 \\ x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ 1+x=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=x^2 \\ x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ \frac{x^3-1}{x^4}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=x^2 \\ y\neq 0 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=x^2 \\ x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ x^3-1=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

donc $S_1=\{(-1,-1);(1,-1);(-1,1);(1,1)\}$.

2.

$$\begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}=0 \\ \frac{1}{(1-y)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{(x+y)^2-(1-x)^2}{(1-x)^2(x+y)^2}=0 \\ \frac{(x+y)^2-(1-y)^2}{(1-y)^2(x+y)^2}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\left[(x+y)-(1-x)\right]\times\left[(x+y)+(1-x)\right]}{(1-x)^2(x+y)^2}=0 \\ \frac{(x+y)^2-(1-y)^2}{(1-y)^2(x+y)^2}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{(2x+y-1)\times(y+1)}{(1-x)^2(x+y)^2}=0 \\ \frac{(x+y)^2-(1-y)^2}{(1-y)^2(x+y)^2}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ (1-x)^2(x+y)^2\neq 0 \\ \frac{(x+y)^2-(1-y)^2}{(1-y)^2(x+y)^2}=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y+1=0 \\ (1-x)^2(x+y)^2\neq 0 \\ \frac{(x+y)^2-(1-y)^2}{(1-y)^2(x+y)^2}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=1-2x \\ (1-x)^2(x+y)^2\neq 0 \\ \frac{(x+y)^2-(1-y)^2}{(1-y)^2(x+y)^2}=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-1 \\ (1-x)^2(x+y)^2\neq 0 \\ \frac{(x+y)^2-(1-y)^2}{(1-y)^2(x+y)^2}=0 \end{cases}$$

donc en substituant y on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \\ \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1-2x \\ (1-x)^2(1-x)^2 \neq 0 \\ \frac{(1-x)^2-(2x)^2}{(2x)^2(1-x)^2} = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ (1-x)^2(x-1)^2 \neq 0 \\ \frac{(x-1)^2-4}{4(x-1)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 1-2x \\ (1-x)^2(1-x)^2 \neq 0 \\ \frac{(1-3x)(1+x)}{(2x)^2(1-x)^2} = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ (1-x)^2(x-1)^2 \neq 0 \\ \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 1-2x \\ (1-x)^2(1-x)^2 \neq 0 \\ 1-3x = 0 \\ 4x^2(1-x)^2 \neq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1-2x \\ (1-x)^2(1-x)^2 \neq 0 \\ 1+x = 0 \\ 4x^2(1-x)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} y = -1 \\ (1-x)^2(x-1)^2 \neq 0 \\ x-3 = 0 \\ 4(x-1)^2 \neq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ (1-x)^2(x-1)^2 \neq 0 \\ x+1 = 0 \\ 4(x-1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 1-2x \\ (2/3)^2(2/3)^2 \neq 0 \\ x = 1/3 \\ 4(1/3)^2(2/3)^2 \neq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1-2x \\ 2^2 \times 2^2 \neq 0 \\ x = -1 \\ 4 \times 2^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} y = -1 \\ (-2)^2 \times 2^2 \neq 0 \\ x = 3 \\ 4 \times 2^2 \neq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ 2^2 \times 2^2 \neq 0 \\ x = -1 \\ 4 \times 2^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 1/3 \\ x = 1/3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 3 \\ x = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

donc $S_2 = \{(1/3, 1/3); (3, -1); (-1, 3); (-1, -1)\}$.

3.

$$\begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \\ \frac{2(x+y)}{1+(x+y)^2} = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2x(1+y^2)-2y(1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} = 0 \\ \frac{2(x+y)(1+x^2)-2x\left[1+(x+y)^2\right]}{(1+x^2)\left[1+(x+y)^2\right]} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(1+y^2) - y(1+x^2) = 0 \\ (x+y)(1+x^2) - x\left[1+(x+y)^2\right] = 0 \end{cases}$$

car les dénominateurs sont strictement positifs et en simplifiant par 2. Il n'y a pas de factorisation possible dans aucune des deux lignes. On développe la première en espérant pouvoir factoriser ensuite :

$$\begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \\ \frac{2(x+y)}{1+(x+y)^2} = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x + xy^2 - y - x^2y = 0 \\ (x+y)(1+x^2) - x\left[1+(x+y)^2\right] = 0 \end{cases}$$

Il n'y a pas de facteur commun.... mais on remarque que $x = y$ est une solution évidente donc on

doit pouvoir factoriser par $x-y$:

$$\begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2y}{1+y^2} \\ \frac{2(x+y)}{1+(x+y)^2} = \frac{2x}{1+x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+xy(y-x)=0 \\ (x+y)(1+x^2)-x\left[1+(x+y)^2\right]=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x-y)(1-xy)=0 \\ (x+y)(1+x^2)-x\left[1+(x+y)^2\right]=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y=0 \\ (x+y)(1+x^2)-x\left[1+(x+y)^2\right]=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 1-xy=0 \\ (x+y)(1+x^2)-x\left[1+(x+y)\right. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=y \\ (2y)(1+y^2)-y\left[1+(2y)^2\right]=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1/y \\ y\neq 0 \\ \left(y+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{y^2}\right)-\frac{1}{y}\left[1+\left(\frac{1}{y}+y\right)^2\right. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=y \\ y\left[2+2y^2-1-4y^2\right]=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1/y \\ y\neq 0 \\ y+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^3}-\frac{1}{y}-\frac{1}{y}\left(\frac{1}{y^2}+2+y^2\right)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=y \\ y(1-2y^2)=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1/y \\ y\neq 0 \\ y+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^3}-\frac{1}{y^3}-\frac{2}{y}-y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=y \\ y(1-y\sqrt{2})(1+y\sqrt{2})=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1/y \\ y\neq 0 \\ -\frac{1}{y}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=y \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=y \\ 1-y\sqrt{2}=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=y \\ 1+y\sqrt{2}=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1/y \\ y\neq 0 \\ 1=0 \text{ (absurde} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Exercice 6. On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1 , R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1,P_2 et P_3. On a donc $P_1+P_2+P_3=1$ et on admet que, pour tout i de $\{1,2,3\}$, $0<P_{\text{i}}<1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.
Pour tout i de $\{1,2,3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon.
On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

1. (a) X_i compte le nombre de résultat parmi $\{R_i\}$ non obtenus. Donc $X_1+X_2+X_3$. compte le nombre de résultats parmi $\{R_1,R_2,R_2\}$ non obtenus. Donc le nombre total de résultats non obtenus est bien $X=X_1+X_2+X_3$

   (b) $(X_i=1)$ signifie qu'en n épreuves indépendantes, le nombre de "R_i" obtenu est nul. Or ce nombre suit une loi binômiale de paramêrtes (n,P_i) donc $\mathrm{P}\left(X_i=1\right)=\binom{n}{0}P_i^0\left(1-P_i\right)^n=\left(1-P_i\right)^n$ et

   Conclusion : $\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1-P_i\right)^n\right)}$

   (c) Comme $E\left(X_i\right)=\left(1-P_i\right)^n$ alors

   Conclusion : $\boxed{E\left(X\right)=E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+E\left(X_3\right)=\left(1-P_2\right)^n=\left(1-P_2\right)^n+\left(1-P_3\right)^n}$

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_{i} en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local.

Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (1-x)^{\mathrm{n}} + (1-y)^{\mathrm{n}} + (x+y)^{\mathrm{n}}$.

2. (a) Comme $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ alors $1 - P_3 = P_1 + P_2$ donc $E(X) = f(P_1, P_2)$

   (b) Comme $(x,y) \to x$ est C^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ et que $z \to z^n$ est C^2 sur $\mathbb{R}$ alors $(x,y) \to (1-x)^n$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$

   Et de même pour f.

   (c) On a

$$\begin{aligned}\partial_1(f)(x,y) &= n(1-x)^{n-1} \times -1 + n(x+y)^{n-1} \\ &= n\left[(x+y)^{n-1} - (1-x)^{n-1}\right] \\ \partial_2(f)(x,y) &= n\left[(x+y)^{n-1} - (1-y)^{n-1}\right]\end{aligned}$$

   (d) On a donc

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+y)^{n-1} - (1-x)^{n-1} = 0 \\ (x+y)^{n-1} - (1-y)^{n-1} = 0 \quad L_2 - L_1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (x+y)^{n-1} - (1-x)^{n-1} = 0 \\ (1-x)^{n-1} = (1-y)^{n-1} \end{cases}$$

   et $(1-x)^{n-1} = (1-y)^{n-1} \iff 1 - x = 1 - y$ car $n - 1 > 0$ et donc la fonction $x \to x^{n-1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que $1 - x \geq 0$ et $1 - y \geq 0$

   Donc

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (2x)^{n-1} - (1-x)^{n-1} = 0 \\ x = y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2x = 1 - x \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

   Donc le seul point de $]0,1[\times]0,1[$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

   On calcule alors les dérivées partielles secondes au point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$:

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1}(f)(x,y) &= n(n-1)\left[(x+y)^{n-2} + (1-x)^{n-2}\right] \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) &= n(n-1)(x+y)^{n-2} \\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) &= n(n-1)\left[(x+y)^{n-2} + (1-y)^{n-2}\right]\end{aligned}$$

   On note $a = n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} > 0$ et $A = \nabla^2 f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2a & a \\ a & 2a \end{pmatrix}$.

   Après pivot sur $A - \lambda I$, on trouve :

$$sp(A) = \{a; 3a\}$$

   Les deux valeurs propres de la matrice hessienne sont strictement positives donc f a un minimum local en $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

   Donc pour avoir le moins de résultats non obtenus (en moyenne), il faut les avoir tous avec la même probabiltié $\frac{1}{3}$.

   (e) Et en ce cas on a $E(X) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$