TD 11 : exercices supplémentaires

Exercice 1.
On admet l'encadrement suivant : $2,7 < e < 2,8$..

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Dresser le tableau des variations de f.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1\ ; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1\ ; +\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1\ ; +\infty[$ et que, pour tout $x \in]1\ ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et } G''(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{aligned}$$

2. (a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1\ ; +\infty[$.
   (b) Vérifier : $G'(2) > 0$.
   (c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1\ ; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $\Phi :]1\ ; +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in]1\ ; +\infty[^2$, par :

$$\Phi(x, y) = (y - f(x+1))^2 + (y - f(x-1))^2$$

où l'application f est définie dans la partie **I**.

1. Vérifier que $(\alpha, f(\alpha+1))$ est un point critique de Φ. où α est défini en **II 2.c**.
2. Est-ce que Φ admet un extremum local en $(\alpha, f(\alpha+1))$?
3. Est-ce que Φ admet un extremum global en $(\alpha, f(\alpha+1))$?

Exercice 2.
On considère l'application $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $]0; +\infty[$, par : $f(t) = t^2 - t\ln(t)$.
On admet : $0{,}69 < ln(2) < 0{,}70$.

1. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

   On considère l'application $F :]0; +\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

2. (a) Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0; +\infty[^2$.
   (b) i. Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :
   $$x > 1, \qquad y = \frac{x}{\ln(x)} \qquad \text{et} \qquad f(\ln(x)) = 1$$
   ii. Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).
   (c) La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

Exercice 3.
On considère la fonction f définie sur $]0; 1[$ par $f(t) = -t\ln(t) + t^{\frac{1}{3}}$.
On note D l'ensemble des couples (x, y) appartenant à $]0; +\infty[$ tels que $x + y < 1$ et $2x < 1$. On considère la fonction G définie sur D par $G(x, y) = f(x + y) - \frac{1}{2}f(2x)$.

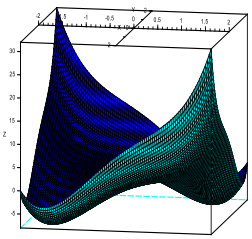
1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0; 1[$ et calculer f' et f''.
2. Justifier que l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.
3. Représenter l'ensemble D.
4. G admet-t-elle un extremum local ?

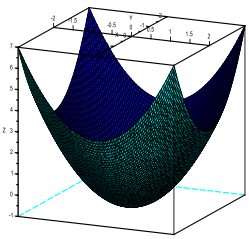
Exercice 4.
exercice sur les fonctions de deux variables edhec 2015

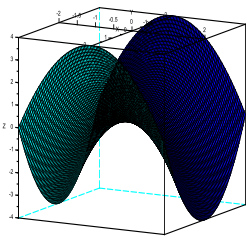
Exercice 5.
On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :
$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
   (b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0 \end{cases}$
   (c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
   (b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.
   (c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.
   (d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.
4. (a) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.
   (b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?
5. (a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.
```
function z=f(x,y)
z= ...
endfunction

x=linspace(-2,2,101)
y=x
fplotd3d(x,y,f)
```
   (b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.
   Nappe 1 Nappe 2 Nappe 3







Exercice 6.

Soit f la fonction définie pour tout couple $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x;y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1.
   (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

2.
   (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

3.
   (a) Développer $2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.
   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple $(x;y)$ de $\mathbb{R}^2$, par :$g(x;y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$.
   (a) Utiliser la question 3. pour établir que : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x;y) \geqslant -1/6$.
   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.