TD 11 : exercices supplémentaires

Exercice 1. : eml 2008

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < e < 2,8$..

Partie I : Étude d'une fonction

1. Par croissances comparées on a $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t) = 0$ donc
$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0 = f(0)$$
et f est continue en 0.

   De plus f est continue sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme de fonctions continues sur $]0;+\infty[$.

   D'où f est continue sur $[0;+\infty[$.

2. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.
De plus
$$f'(t) = 1\times\ln(t) + t\times\frac{1}{t} - 1 = \ln(t) + 1 - 1 = \ln(t)$$
   - Par produit de limites valant $+\infty$,
$$f(t) = t\times(\ln(t)-1) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$
   - On connait le signe de $\ln(t)$, on en déduit :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(t)$	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. f est continue sur $[0;+\infty[$ donc admet des primitives sur cet intervalle. Soit F une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

   f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$, donc F est de classe C^2 sur cet intervalle.

   On a alors
$$G(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1))$$
est de classe C^2 sur $]1;+\infty[$ (attention à la restriction !) car F est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et $x\mapsto x+1$ est à valeurs dans $]2;+\infty[$ tandis que $x\mapsto x-1$ est à valeurs dans $]0;+\infty[$.
De plus pour tout $x\in]1;+\infty[$,
$$G'(x) = \frac{1}{2}(F'(x+1) - F'(x-1)) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

puis :

$$G''(x) = \frac{1}{2}(f'(x+1) - f'(x-1)) = \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right).$$

2. (a) On a pour tout $x \in]1;+\infty[$, $x+1 > x-1$ donc par croissance de ln,

$$\ln(x+1) > \ln(x-1) \Longrightarrow \ln(x+1) - \ln(x-1) > 0 \Longrightarrow G''(x) > 0$$

(b) On calcule :

$$G'(2) = \frac{1}{2}(f(3) - f(1)) > 0$$

car f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ donc :

$$1 < 3 \Longrightarrow f(1) < f(3)$$

donc $f(3) > f(1)$

(c) G' est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$ donc réalise une bijection de $]1;+\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{x\to 1} G'(x); \lim\limits_{x\to+\infty} G'(x)\right[$.

La première ne pose aucun problème : par continuité de f,

$$G'(x) = \frac{1}{2}\big(\ f(x+1) - f(x-1)\ \big) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}\big(\ f(2) - f(0)\big) = \frac{1}{2}f(2) = \ln 2 - 1$$

De plus on constate que cette limite est négative car $2 < e$ donc $\ln 2 < \ln e = 1$.

Par contre la limite de G' en $+\infty$ est extrêmement difficile : elle requière de mener un calcul très précis, mettant en jeu des factorisations par le terme prépondérant et un DL de $\ln(1+u)$ avec $u = \frac{1}{t} \to 0$....

Mais on peut l'éviter : en effet on a vu que $G'(2) > 0$, donc par croissance de f on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} G'(x)$ est supérieure à $G'(2) > 0$, donc strictement supérieure à 0.

Enfin puisque $0 \in \left]\lim\limits_{x\to 1} G'(x); \lim\limits_{x\to+\infty} G'(x)\right[$, l'équation $G'(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1;+\infty[$.

Enfin on a vu que $G'(2) > 0 = G'(\alpha)$ donc par croissance de G' :

$$\alpha < 2$$

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

1. Φ est de classe C^2 sur $]1;+\infty[^2$ car f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$, et la fonctions $(x,y) \mapsto y$ l'est aussi, donc $(x,y) \mapsto (y - f(x+1))$ et $(x,y) \mapsto (y - f(x-1))$ le sont aussi et à valeurs dans $]0;+\infty[$.

   De plus
   $$\partial_1\Phi(x,y) = -2f'(x+1)(y - f(x+1)) - 2f'(x-1)(y - f(x-1))$$
   et
   $$\partial_2\Phi(x,y) = 2(y - f(x+1)) + 2(y - f(x-1)).$$

   • Pas besoin de résoudre de système, on se contente de vérifier que :
   $$\partial_1\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = -2f'(\alpha+1)(f(\alpha+1) - f(\alpha+1)) - 2f'(\alpha-1)(f(\alpha+1) - f(\alpha-1))$$
   $$\partial_1\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = -2\big(\ f(\alpha+1) - f(\alpha-1)\ \big) \times \big(\ f'(\alpha+1) + f'(\alpha-1)\ \big)$$
   Or $G'(\alpha) = 0$ donc $f(\alpha+1) - f(\alpha-1) = 0$ et
   $$\partial_1\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = 0$$
   D'autre part
   $$\partial_2\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = 2(f(\alpha+1) - f(\alpha+1)) + 2(f(\alpha+1) - f(\alpha-1)) = 0$$
   pour les mêmes raisons que la précédente dérivée.

2. Astuce ! : On montre directement que c'est un extremum global !
   On calcule
   $$\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = (f(\alpha+1) - f(\alpha+1))^2 + (f(\alpha+1) - f(\alpha-1))^2 = 0.$$
   Or pour tout (x,y) $\Phi(x,y) \geq 0$ comme somme de carrés donc Φ admet un minimum global, donc un minimum local en $(\alpha, f(\alpha+1))$.

3. Oui, c'est un minimum global : cf ci-dessus

Exercice 2. : eml 2016

1. • f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ par opérations élémentaires, avec $t>0$. De plus pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$ on a :
$$f'(t)=2t-\ln t-1$$
. Nous n'arrivons pas à déterminer le signe de f' donc on calcule
$$f''(t)=2-\frac{1}{t}$$
$$f''(t)=\frac{2t-1}{t}$$
est du signe de $2t-1$, donc négatif avant $1/2$, nul en $1/2$ et positif après. On en déduit que f' est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum atteint en $1/2$, qui vaut :
$$f'(1/2)=1-\ln\left(\frac{1}{2}\right)-1=\ln 2>0$$
Le minimum de f' est strictement positif donc f' est strictement positive sur $]0;+\infty[$, et enfin f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\lim\limits_{t\to 0} f(t)=0$ par croissance comparée et
$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty} t^2\left(1-\frac{\ln t}{t}\right)=+\infty$$
car $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ par croissances comparées.

• f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]\lim\limits_{t\to 0} f(t),\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\right[=]0,+\infty[$.

Or $1\in]0;+\infty[$ (intervalle image), donc l'équation $f(t)=1$ admet bien une unique solution. Il ne reste qu'à tester celle proposée :
$$f(1)=1^2-1\times\ln(1)=1$$
donc 1 est bien solution de l'équation, et c'est la seule d'après ce qui précède.

2. (a) On calcule sans difficulté, pour tout $(x,y)\in]0;+\infty[^2$:
$$\partial_1(F)(x,y)=\ln y-\frac{y}{x}\quad\text{et}\quad\partial_2(F)(x,y)=\frac{x}{y}-\ln x$$

(b) i. On résout le système :
$$\begin{cases}\partial_1(F)(x,y)=0\\ \partial_2(F)(x,y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}\ln y-\frac{y}{x}=0\\ \frac{x}{y}-\ln x=0\end{cases}\iff\begin{cases}\ln y-\frac{y}{x}=0\\ \frac{x}{y}=\ln x\end{cases}$$
Comme x et y sont strictement positives, on en déduit que $\ln x$ l'est aussi et donc que $x>1$. On a donc
$$\begin{cases}\partial_1(F)(x,y)=0\\ \partial_2(F)(x,y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}x>1\\ \ln y-\frac{y}{x}=0\\ y=\frac{x}{\ln x}\end{cases}\iff\begin{cases}x>1\\ \ln\left(\frac{x}{\ln x}\right)-\frac{1}{\ln x}=0\\ y=\frac{x}{\ln x}\end{cases}\iff\begin{cases}x>1\\ \ln(x)-\ln[\ln x]-\frac{1}{\ln x}=0\\ y=\frac{x}{\ln x}\end{cases}$$
$$\iff\begin{cases}x>1\\ \frac{[\ln(x)]^2-\ln x\ln[\ln x]-1}{\ln x}=0\\ y=\frac{x}{\ln x}\end{cases}\iff\begin{cases}x>1\\ f(\ln x)=1\\ y=\frac{x}{\ln x}\end{cases}$$

ii. On termine la résolution du système précédent en se servant de la question 5 qui résout $f(t)=1$:
$$\begin{cases}\partial_1(F)(x,y)=0\\ \partial_2(F)(x,y)=0\end{cases}\iff\begin{cases}x>1\\ f(\ln x)=0\\ y=\frac{x}{\ln x}\end{cases}\iff\begin{cases}x>1\\ \ln x=1\\ y=\frac{x}{\ln x}\end{cases}\iff\begin{cases}x>1\\ x=e\\ y=\frac{e}{\ln e}=e\end{cases}$$
donc le seul point critique de F est bien (e,e).

(c) On cherche la matrice Hessienne de f en (e,e) et on commence par les dérivées partielles secondes : pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$,

$$\partial^2_{1,1}(F)(x,y) = \frac{y}{x^2} \quad , \quad \partial^2_{1,2}(F)(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \quad , \quad \partial^2_{2,2}(F)(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

ce qui donne ensuite la hessienne au point (e,e) suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 1/e & 0 \\ 0 & -1/e \end{pmatrix}$$

qui est diagonale, donc ses valeurs propres sont $1/e$ et $-1/e$, de signes opposés donc le point (e,e) est un point-selle et pas un extremum local de F.

Exercice 3. : eml 2013

1. f est de classe C^2 sur $]0;1[$ comme produit et somme de fonctions usuelles de classe C^2 sur cet intervalle (seule la première définition est ici prise en compte) et pour tout $t \in]0;1[$:

$$f'(t) = -\left(1\ln t + t\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{3}t^{1/3-1} = -\ln t - 1 + \frac{1}{3}t^{-2/3} = \frac{1}{3t^{2/3}} - \ln t - 1$$

et enfin :

$$f''(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{3} \times t^{-2/3-1} = -\frac{1}{t} - \frac{2}{9t^{5/3}}$$

2. On obtient $f''(t) < 0$ sur $]0;1[$ comme somme de deux fonctions strictement négatives. D'où f' est strictement décroissante sur $]0;1[$, et continue car f' est de classe C^1.

D'après le théorème de la bijection continue, f' réalise donc une bijection de $]0;1[$ dans $f'(]0;1[) = \left]\lim_{t\to 1^-} f'(t); \lim_{t\to 0^+} f'(t)\right[$.

Calculons ces deux limites :

$$\lim_{t\to 1^-} f'(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{3t^{2/3}} - \ln t - 1 = \frac{1}{3} - 0 - 1 = -\frac{2}{3}$$

par somme de limites.

$$\lim_{t\to 0^+} f'(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{3t^{2/3}} - \ln t - 1 = +\infty - (-\infty) - 1 = +\infty + \infty - 1 = \infty$$

On en déduit que $\Im(f') = \left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$, donc $0 \in \Im(f')$ et enfin l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution sur $]0;1[$ notée α.

Comme on ne connaît pas α mais $f'(\alpha)$, comparons les images par f' :

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{2/3}}{3} - \ln(1) + \ln(e) - 1 = \frac{e^{2/3}}{3} > 0 = f'(\alpha)$$

donc par stricte décroissance de f', $\alpha > \frac{1}{e}$.

D'autre part on a déjà vu que $\alpha \in]0;1[$ donc $\alpha < 1$, et finalement on a bien :

$$\frac{1}{e} < \alpha < 1$$

3. On trace les droites $y = 1 - x$ et $x = \frac{1}{2}$ et on hachure la partie de courbe au-dessus de l'axe des abscisses et en dessous de la droite $y = 1 - x$ $(0 < y < 1 - x)$, et entre l'axe des ordonnées et la droite $x = \frac{1}{2}$ $(0 < x < \frac{1}{2})$.

4. $\partial_1 G(x,y) = f'(x+y) - f'(2x)$ et $\partial_2 G(x,y) = f'(x+y)$.

• Le point (x,y) est un point critique de G si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{c}\partial_1 G(x,y)=0\\ \partial_2 G(x,y)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}f'(x+y)-f'(2x)=0\\ f'(x+y)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}f'(2x)=0\\ f'(x+y)=0\end{array}\right.$$

en effectuant le pivot $L_1 \leftarrow L_2 - L_1$.

• Or $f'(t) = 0 \iff t = \alpha$ donc on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c}\partial_1 G(x,y)=0\\ \partial_2 G(x,y)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}2x=\alpha\\ x+y=\alpha\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c}x=\frac{\alpha}{2}\\ y=\alpha-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}\end{array}\right.$$

Il reste à prouver que ce point appartient à D :

On a $0 < \frac{1}{e} < \alpha < 1$ donc $\frac{\alpha}{2} > 0$ et le point appartient à $]0;+\infty[^2$.
De plus $x+y=\alpha<1$ et $2x=\alpha<1$ donc le point appartient bien à D, et c'est l'unique point critique de G.

• On calcule les dérivées partielles secondes : $\partial^2_{1,1}G(x,y) = f''(x+y) - 2f''(2x)$, $\partial^2_{1,2}G((x,y) = f''(x+y)$ et $\partial^2_{2,2}G((x,y) = f''(x+y)$.

$$\partial^2_{1,1}G(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}) = f''(\alpha) - 2f''(\alpha) = -f''(\alpha) \quad , \quad \partial^2_{1,2}G(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}) = f''(\alpha) \quad , \quad \partial^2_{2,2}G(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}) = f''(\alpha)$$

On calcule les valeurs propres de la matrice hessienne A en ce point, en faisant un pivot sur $A-\lambda I = \begin{pmatrix}-f''(\alpha)-\lambda & f''(\alpha)\\ f''(\alpha) & f''(\alpha)-\lambda\end{pmatrix}$ (on échange L_1 et L_2, puis on obtient une réduite triangulaire) on trouve deux valeurs propres de signes opposés :(car on sait que $f''(\alpha) < 0$ d'après la question 2.) .

$$sp(A) = \{-\sqrt{2}f''(\alpha); \sqrt{2}f''(\alpha)\}$$

Donc G n'admet aucun extremum local.

Exercice 4. : edhec 2015

1. (a) On reconnaît l'intégrale de la densité, l'espérance et le moment d'ordre deux d'une variable X suivant la loi exponentielle de paramètre 1, donc ces trois intégrales convergent et :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1 \ , \ I_1 = E(X) = 1 \ , \ I_2 = E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2 = 1 + 1^2 = 2.$$

(b) On pose

$$u = t^{k+1} \quad \text{et} \quad v = -e^{-t}$$

qui sont de classe C^1 avec

$$u' = (k+1)t^k \quad \text{et} \quad v = e^{-t}$$

l'intégration par parties donne :

$$I_{k+1}(a) = \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_0^a - \int_0^a -(k+1)t^k e^{-t}\,dt = (k+1)\int_0^a t^k e^{-t}\,dt - a^{k+1}e^{-a} + 0 = (k+1)I_k(a) - a^{k+1}e^{-a}.$$

(c) On fait tendre a vers $+\infty$: on remarque immédiatement que si I_k converge, alors $I_k(a)$ tend vers I_k, et par croissances comparées le terme de droite tend vers 0. On en déduit que si I_k converge, I_{k+1} aussi et :

$$I_{k+1} = (k+1)I_k - 0 = (k+1)I_k$$

Or I_2 est convergente, donc I_3 puis I_4 sont convergentes et :

$$I_3 = 3I_2 = 6 \quad \text{et enfin} \quad I_4 = 4I_3 = 24.$$

2. Deux possibilités ici : comme la valeur n'est pas demandée, on doit a priori penser au théorème de comparaison. Cependant on peut prendre de l'avance sur la question précédente et développer pour faire apparaître les intégrales convergentes déjà calculées (plus efficace puisque cela fait l'économie d'un théorème de comparaison).

Restons cependant dans les clous habituels avec le théorème de comparaison. On factorise sous le carré par le terme prépondérant : au voisinage de $+\infty$,

$$(y + xt + t^2)^2 = \left(t^2\left[1 + \frac{x}{t} + \frac{y}{t^2}\right]\right)^2 = t^4\left[1 + \frac{x}{t} + \frac{y}{t^2}\right]^2 \underset{t\to+\infty}{} t^4$$

car le facteur a côté converge trivialement vers 1. On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$,

$$(y + xt + t^2)^2 e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^4 e^{-t}$$

avec des fonctions intégrées positives, et l'intégrale de t^4e^{-t} qui converge en $+\infty$ (c'est I_4), donc par théorème de comparaison l'intégrale cherchée converge en $+\infty$; comme elle n'est pas généralisée ailleurs, elle est donc convergente.

Remarque : on pouvait aussi conclure avec une négligeabilité devant $1/t^2$, au prix d'une croissance comparée supplémentaire sur t^6e^{-t}.

3. (a) On développe le carré et on fait apparaitre les intégrales déjà calculées :

$$\begin{aligned}(y + xt + t^2)^2 &= (y + xt + t^2)(y + xt + t^2) = y^2 + xyt + yt^2 + xyt + x^2t^2 + xt^3 + yt^2 + xt^3 + t^4 \\ &= t^4 + 2xt^3 + (x^2 + 2y)t^2 + 2xyt + y^2.\end{aligned}$$

On en déduit alors que (toutes les intégrales sont convergentes) :

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^4e^{-t}\, dt + 2x\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}\, dt + (x^2 + 2y)\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\, dt + 2xy\int_0^{+\infty} te^{-t}\, dt + y^2\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \\ &= 24 + 2x \times 6 + (x^2 + 2y) \times 2 + 2xy \times 1 + y^2 \times 1 \\ &= 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24.\end{aligned}$$

(b) f est polynômiale donc elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

4. (a) On obtient sans difficulté, pour tout $(,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_1(f)(x,y) = 4x + 12 + 2y \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x,y) = 2y + 4 + 2x.$$

(a,b) est donc un point critique de f si et seulement si il vérifie le système :

$$\begin{cases} 4x + 12 + 2y = 0 \\ 2y + 4 + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 12 + 2y = 0 \\ y = -2 - x \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 12 - 4 - 2x = 0 \\ y = -2 - x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = -8 \\ y = -2 - x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

donc le seul point critique de f est $(a,b) = (-4,2)$.

(b) Sans difficulté, on obtient pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 4 \quad , \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 2 \quad , \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 2$$

puis au point $(a,b) = (-4,2)$ ces dérivées partielles constantes prennent la valeur constante et :

$$\nabla^2(f)(-4,2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Appelons H cette matrice, on cherche les réels λ tels que $H - \lambda I$ n'est pas inversible :

$$H-\lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \Longleftrightarrow L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 2 & 2-\lambda \\ 4-\lambda & 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow L_2 \leftarrow 2L_2-(4-\lambda)L_1 \begin{pmatrix} 2 & 2-\lambda \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

avec

$$P(\lambda) = 4-(4-\lambda)(2-\lambda) = 4-(8-4\lambda-2\lambda+\lambda^2) = -\lambda^2+6\lambda-4$$

qui admet pour discriminant puis racines :

$$\Delta = 36-16 = 20 \quad , \quad \lambda_1 = \frac{-6-\sqrt{20}}{-2} = \frac{-6-2\sqrt{5}}{-2} = 3+\sqrt{5} > 0$$

et enfin

$$\lambda_2 = \frac{-6+2\sqrt{5}}{-2} = 3-\sqrt{5}$$

et on transforme par équivalence :

$$3-\sqrt{5} > 0 \Longleftrightarrow 3 > \sqrt{5} \Longleftrightarrow 9 > 5$$

qui est vrai donc λ_1 et λ_2, qui sont les valeurs propres de H, sont strictement positives : f admet un minimum local au point $(-4,2)$.

Enfin on calcule :

$$m = f(-4,2) = 16+4-48+8-16+24 = 52-48 = 4.$$

5. (a) On calcule cette quantité en l'isolant dans l'égalité : en l'appelant A on a :

$$\begin{aligned} A &= 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 - 2x^2 - 2xy - 12x \\ &= 2\left(x^2+\frac{xy}{2}+3x+\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{3y}{2}+3x+\frac{3y}{2}+9\right) - 2x^2 - 2xy - 12x \\ &= 2\left(x^2+xy+6x+3y+9+\frac{y^2}{4}\right) - 2x^2 - 2xy - 12x \\ &= 2x^2+2xy+12x+6y+18+\frac{y^2}{2} - 2x^2 - 2xy - 12x = 6y+18+\frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

(b) De même, en appelant B ce nombre :

$$\begin{aligned} B &= \frac{y^2}{2} - 2y + 6 - \frac{1}{2}(y-2)^2 = \frac{y^2}{2} - 2y + 6 - \frac{1}{2}(y^2-4y+4) \\ &= \frac{y^2}{2} - 2y + 6 - \frac{y^2}{2} + 2y - 2 = 4. \end{aligned}$$

(c) On se sert des deux égalités précédentes pour réécrire f :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2x^2+2xy+12x)+y^2+4y+24 = 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 - 6y - 18 - \frac{y^2}{2} + y^2 + 4y + 24 \\ &= 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 + \frac{y^2}{2} - 2y + 6 = 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4 \\ &= 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + f(-4,2). \end{aligned}$$

Comme un carré est toujours positif, on en déduit que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) \geq f(-4,2)$$

et f admet bien un minimum global au point $(a,b) = (-4,2)$.

Exercice 5. : edhec 2017
On considère la fonction f qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

1. f est un polynôme des 2 variables x et y et par conséquent $\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$.
2. (a) On a $\partial_1(f)f(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y$ et $\partial_2(f)f(x,y) = 4y^3 - 4y + 4x$.

   (b) Le gradient de f est $\nabla(f)(x,y) = (\partial_1(f)(x,y), \partial_2(f)(x,y)) = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x)$
   Donc $\nabla(f)(x,y) = (0,0)$ si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$

   (c) (x,y) est donc un point critique de f si, et seulement si,

   $$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \underset{(L_1 \leftarrow L_1 + L_2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ x^3 - x + y = 0 \end{cases}$$

   Comme la fonction $x \to x^3$ est bijective , le système équivaut à :

   $$\begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x(x^2-2) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

   f possède donc trois points critiques qui sont : $(0,0)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$
3. (a) On a $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 12x^2 - 4$, $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 12y^2 - 4$ et $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 4$.

   (b) Les matrices hessiennes de f sont donc :
   $H(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, $H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ *et* $H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$.

   (c) Les valeurs propres d'une matrice H sont les réels λ pour lesquels $H - \lambda I$ est non inversible.

   — en $(0,0)$:

   $$H(0,0) - \lambda I = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, λ est valeur propre de $H(0;0)$ ssi $(-4-\lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 8\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda(8+\lambda) = 0$.

   Le réel 0 est donc valeur propre de $H(0;0)$ et <u>la méthode du cours ne permet pas de conclure</u> quant à l'existence (ou non) d'un extrémum pour f au point $(0;0)$.

   — en $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$:

   $$H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) - \lambda I = H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) - \lambda I = \begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$

   Ainsi, λ est valeur propre de $H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ ssi
   $(20-\lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (20-\lambda-4)(20-\lambda+4) = 0 \Leftrightarrow (16-\lambda)(24-\lambda) = 0$.

   Les 2 valeurs propres de $H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ sont donc 16 et 24 , deux réels strictement positifs , ce qui permet de conclure que <u>f admet donc en ces deux points un minimum local</u> qui a pour valeur $f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8$.

   (d) On a $f(x,x) = x^4 + x^4 - 2(x-x)^2 = 2x^4 \geq 0$ au voisinage de $x = 0$,
   et $f(x,-x) = x^4 + (-x)^4 - 2(x+x)^2 = -8x^2 + 2x^4 \underset{x \to 0}{\sim} -8x^2 \leq 0$ au voisinage de $x = 0$.
   Comme $f(0,0) = 0$ et f change de signe au voisinage de $(0,0)$,on peut conclure que :

   <u>f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.</u>
4. (a) Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, On a :

   $$f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy - x^4 + 4x^2 - 4 - y^4 + 4y^2 - 4 - 2x^2 - 2y^2 - 4xy = -8.$$

(b) On a donc : $f(x,y) = -8 + (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 \geq -8$, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
Et comme $f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8$, <u>f admet un minimum GLOBAL en ces deux points .</u>

5. (a) La deuxième ligne du script complété :
```
z=x^4+y^4-2(x-y)^2
```
(b) La première nappe est la seule où la fonction admet deux points où il y a un minimum (global) de même valeur et c'est donc la seule possible pour f.

Exercice 6. : edhec 2006

1. (a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynomiale et

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 4x+2y-1 \\ \partial_2 f(x,y) &= 4y+2x-1 \end{aligned}$$

(b) (x,y) est un point critique si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \left\{\begin{array}{l} 4x+2y-1=0 \\ 2x+4y-1=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -6y+1=0 \\ 2x+4y-1=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=1/6 \\ x=1/6 \end{array}\right.$$

Donc le seul point critique de$f$ est

$$A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

2. (a) f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynomiale et

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) &= 4 \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) &= 2 \\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) &= 4 \end{aligned}$$

(b) Déterminons les valeurs propres de la matrice hessienne M au point $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, en faisant un pivot sur $M - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$ (on échange L_1 et L_2, puis on obtient une réduite triangulaire) on trouve deux valeurs propres strictement positives

$$sp(M) = \{2; 6\}$$

donc f admet un minimum local en $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

3. (a) Pour développer $(a+b+c)^2$, on regroupe :

$$\begin{aligned} \left(a + (b+c)^2\right)^2 &= a^2 + 2a\,(b+c) + (b+c)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{aligned}$$

On a développe

$$\begin{aligned} 2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 &= 2\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(y^2 - \frac{y}{3} + \frac{1}{36}\right) \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(b) On reconnaît donc

$$f(x,y) + \frac{1}{6} = 2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$$

et comme un carré est toujours positif, on a donc pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) + \frac{1}{6} = f(x,y) - f(A) \geq 0 \iff f(x,y) \geq f(A)$$

On en déduit que le point A est un minimum global de f.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

(a) On remarque que

$$g(x,y) = f\left(e^x, e^y\right)$$

et comme

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq -\frac{1}{6}$$

alors en particulier :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(e^x, e^y) = g(x,y) \geq -\frac{1}{6}$$

(b) On cherche un point tel que

$$g(x,y) = -\frac{1}{6} \Longleftrightarrow f(e^x, e^y) = -\frac{1}{6} = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

Comme ce minimum global est atteint en un unique point on obtient :

$$g(x,y) = -\frac{1}{6} \Longleftrightarrow e^x = e^y = \frac{1}{6} \Longleftrightarrow x = y = -\ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln 6$$

donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) \geq g(-\ln 6, -\ln 6)$$

et g admet un minimum global au point $(-\ln 6; -\ln 6)$.