Exercice 1 :On admet l'encadrement suivant :
$2,7 < e < 2,8$..

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Rappel : Nous avions trouvé le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1\ ;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1\ ;+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

<u>Attention :</u> on reconnait une fonction définie par une intégrale, il faut donc appliquer la **méthode d'étude des fonctions définies par une intégrale** ! ! comme au concours blanc, dans le DS3 edhec...etc ...et non inventer une méthode !

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1\,;+\infty[$ et que, pour tout $x \in\,]1\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et } G''(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{aligned}$$

Méthode : il faut introduire une primitive F de la fonction intégrée, ici, f et exprimer G en fonction de F.

Correction :

d'après la partie I., f est continue sur $[0;+\infty[$ donc admet des primitives sur cet intervalle. Soit F une primitive de f sur $[0;+\infty[$.

De plus, f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$, donc F est de classe C^2 sur cet intervalle.

On a alors

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}[F(t)]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1))$$

est de classe C^2 sur $]1;+\infty[$ (attention à la restriction !) car F est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et $x \mapsto x+1$ est à valeurs dans $]2;+\infty[$ tandis que $x \mapsto x-1$ est à valeurs dans $]0;+\infty[$.

De plus pour tout $x \in]1;+\infty[$,

$$G'(x) = \frac{1}{2}(F'(x+1) - F'(x-1)) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

puis :

$$G''(x) = \frac{1}{2}(f'(x+1) - f'(x-1)) = \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right).$$

2.(a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1\ ;+\infty[$.

Méthode : on montre que sa dérivée G'' est strictement positive

Correction :
On a pour tout $x \in]1;+\infty[$, $x+1 > x-1$ donc par croissance de ln,

$$\ln(x+1) > \ln(x-1) \Longrightarrow \ln(x+1) - \ln(x-1) > 0 \Longrightarrow G''(x) > 0$$

2.(b) Vérifier : $G'(2) > 0$.

Correction :
On calcule :

$$G'(2) = \frac{1}{2}(f(3) - f(1)) > 0$$

car f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ donc :

$$1 < 3 \Longrightarrow f(1) < f(3)$$

$$f(3) - f(1) > 0.$$

2.(c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1\,;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$

Correction :

G' est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$ donc réalise une bijection de $]1;+\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{x\to 1} G'(x); \lim\limits_{x\to+\infty} G'(x)\right[$.

La première ne pose aucun problème : par continuité de f,

$$G'(x) = \frac{1}{2}\big(\, f(x+1)-f(x-1)\,\big) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}\big(\, f(2)-f(0)\big) = \frac{1}{2}f(2) = \ln 2-1$$

De plus on constate que cette limite est négative car $2 < e$ donc $\ln 2 < \ln e = 1$.

Par contre la limite de G' en $+\infty$ est extrêmement difficile

Mais on peut l'éviter : en effet on a vu que $G'(2) > 0$, donc par croissance de f on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} G'(x)$ est supérieure à $G'(2) > 0$, donc strictement supérieure à 0.

Enfin puisque $0 \in \left]\lim\limits_{x\to 1} G'(x); \lim\limits_{x\to+\infty} G'(x)\right[$, l'équation $G'(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1;+\infty[$.

Enfin on a vu que $G'(2) > 0 = G'(\alpha)$ donc par croissance de G' :

$$\alpha < 2$$

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $\Phi :]1\,;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in]1\,;+\infty[^2$, par :

$$\Phi(x, y) = (y - f(x+1))^2 + (y - f(x-1))^2$$

où l'application f est définie dans la partie **I**.

1. Vérifier que $(\alpha, f(\alpha+1))$ est un point critique de Φ. où α est défini en **II 2.c**.

Correction :
Φ est de classe C^2 sur $]1;+\infty[^2$ car f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$, et la fonctions $(x,y) \mapsto y$ l'est aussi, donc $(x,y) \mapsto (y - f(x+1))$ et $(x,y) \mapsto (y - f(x-1))$ le sont aussi et à valeurs dans $]0;+\infty[$.
De plus

$$\partial_1 \Phi(x,y) = -2f'(x+1)(y - f(x+1)) - 2f'(x-1)(y - f(x-1))$$

et

$$\partial_2 \Phi(x,y) = 2(y - f(x+1)) + 2(y - f(x-1)).$$

Pas besoin de résoudre de système, on se contente de vérifier que :

$$\partial_1\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = -2f'(\alpha+1)(f(\alpha+1)-f(\alpha+1))-2f'(\alpha-1)(f(\alpha+1)-$$

$$\partial_1\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = -2\big(\, f(\alpha+1)-f(\alpha-1)\,\big)\times\big(\, f'(\alpha+1)+f'(\alpha-1)\,\big)$$

Or $G'(\alpha) = 0$ donc $f(\alpha+1) - f(\alpha-1) = 0$ et

$$\partial_1\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = 0$$

D'autre part

$$\partial_2\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = 2(f(\alpha+1)-f(\alpha+1))+2(f(\alpha+1)-f(\alpha-1)) = 0$$

pour les mêmes raisons que la précédente dérivée.

2.Est-ce que Φ admet un extremum local en $(\alpha, f(\alpha+1))$?

Correction :
Astuce ! : On montre directement que c'est un extremum global !
On calcule

$$\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = (f(\alpha+1)-f(\alpha+1))^2+(f(\alpha+1)-f(\alpha-1))^2 = 0.$$

Or pour tout (x, y) $\Phi(x, y) \geq 0$ comme somme de carrés donc Φ admet un minimum global, donc un minimum local en $(\alpha, f(\alpha + 1))$.

Est-ce que Φ admet un extremum global en $(\alpha, f(\alpha+1))$?

Correction :
Oui, c'est un minimum global : cf ci-dessus

Exercice 2 :On considère l'application $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $]0;+\infty[$, par :$f(t) = \ t^2 - t\ln(t)$.
On admet : $0{,}69 < ln(2) < 0{,}70$.

1. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Correction :

• f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ par opérations élémentaires, avec $t > 0$. De plus pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f'(t) = 2t - \ln t - 1$$

. Nous n'arrivons pas à déterminer le signe de f' donc on calcule

$$f''(t) = 2 - \frac{1}{t}$$

$$f''(t) = \frac{2t-1}{t}$$

est du signe de $2t - 1$, donc négatif avant $1/2$, nul en $1/2$ et positif après. On en déduit que f' est strictement décroissante puis strictement croissante et admet un minimum atteint en $1/2$, qui vaut :

$$f'(1/2) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \ln 2 > 0$$

Le minimum de f' est strictement positif donc f' est strictement positive sur $]0;+\infty[$, et enfin f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ par croissance comparée et

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} t^2\left(1-\frac{\ln t}{t}\right) = +\infty$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ par croissances comparées.

• f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\left]\lim\limits_{t\to 0} f(t), \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\right[=]0,+\infty[$.

Or $1 \in]0;+\infty[$ (intervalle image), donc l'équation $f(t) = 1$ admet bien une unique solution. Il ne reste qu'à tester celle proposée :

$$f(1) = 1^2 - 1\times\ln(1) = 1$$

donc 1 est bien solution de l'équation, et c'est la seule d'après ce qui précède.

On considère l'application $F :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x, y) de $]0;+\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

2.(a) Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0;+\infty[^2$.

Correction :
On calcule sans difficulté, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$:

$$\partial_1(F)(x, y) = \ln y - \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(x, y) = \frac{x}{y} - \ln x$$

2.(b) i) Soit $(x, y) \in]0; +\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \qquad y = \frac{x}{\ln(x)} \qquad \text{et} \qquad f(\ln(x)) = 1$$

Correction :
On résout le système :

$$\begin{cases} \partial_1(F)(x,y) = 0 \\ \partial_2(F)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln y - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln y - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} = \ln x \end{cases}$$

Comme x et y sont strictement positives, on en déduit que $\ln x$ l'est aussi et donc que $x > 1$. On a donc

$$\begin{cases} \partial_1(F)(x,y) = 0 \\ \partial_2(F)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ \ln y - \frac{y}{x} = 0 \\ y = \frac{x}{\ln x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 1 \\ \ln\left(\frac{x}{\ln x}\right) - \frac{1}{\ln x} = 0 \\ y = \frac{x}{\ln x} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ \ln(x) - \ln[\ln x] - \frac{1}{\ln x} = 0 \\ y = \frac{x}{\ln x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 1 \\ \frac{[\ln(x)]^2 - \ln x \ln[\ln x] - 1}{\ln x} = 0 \\ y = \frac{x}{\ln x} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ f(\ln x) = 1 \\ y = \frac{x}{\ln x} \end{cases}$$

2.(b) ii) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).

Correction :
On termine la résolution du système précédent en se servant de la question 1. qui résout $f(t) = 1$:

$$\begin{cases} \partial_1(F)(x,y) = 0 \\ \partial_2(F)(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ f(\ln x) = 0 \\ y = \frac{x}{\ln x} \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ \ln x = 1 \\ y = \frac{x}{\ln x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > 1 \\ x = e \\ y = \frac{e}{\ln e} = e \end{cases}$$

donc le seul point critique de F est bien (e, e).

2. (c) La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

Correction :
On cherche la matrice Hessienne de f en (e,e) et on commence par les dérivées partielles secondes : pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$,

$$\partial^2_{1,1}(F)(x,y) = \frac{y}{x^2} \quad , \quad \partial^2_{1,2}(F)(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \quad , \quad \partial^2_{2,2}(F)(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

ce qui donne ensuite la hessienne au point (e,e) suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 1/e & 0 \\ 0 & -1/e \end{pmatrix}$$

qui est diagonale, donc ses valeurs propres sont $1/e$ et $-1/e$, de signes opposés donc le point (e,e) est un point-selle et pas un extremum local de F.

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(t) = -t\ln(t) + t^{\frac{1}{3}}$.
On note D l'ensemble des couples (x, y) appartenant à $]0;+\infty[$ tels que $x + y < 1$ et $2x < 1$. On considère la fonction G définie sur D par $G(x, y) = f(x + y) - \frac{1}{2}f(2x)$.

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0;1[$ et calculer f' et f''.

Correction :
f est de classe C^2 sur $]0;1[$ comme produit et somme de fonctions usuelles de classe C^2 sur cet intervalle (seule la première définition est ici prise en compte) et pour tout $t \in]0;1[$:

$$f'(t) = -\left(1\ln t + t\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{3}t^{1/3-1} = -\ln t - 1 + \frac{1}{3}t^{-2/3} = \frac{1}{3t^{2/3}} - \ln t - 1$$

et enfin :

$$f''(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{3} \times t^{-2/3-1} = -\frac{1}{t} - \frac{2}{9t^{5/3}}$$

2.Justifier que l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution et une seule, notée α, et montrer : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

Correction :
On obtient $f''(t) < 0$ sur $]0;1[$ comme somme de deux fonctions strictement négatives. D'où f' est strictement décroissante sur $]0;1[$, et continue car f' est de classe C^1.
D'après le théorème de la bijection continue, f' réalise donc une bijection de $]0;1[$ dans $f'(]0;1[) = \left]\lim\limits_{t\to 1^-} f'(t); \lim\limits_{t\to 0^+} f'(t)\right[$.
Calculons ces deux limites :

$$\lim_{t\to 1^-} f'(t) = \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{3t^{2/3}} - \ln t - 1 = \frac{1}{3} - 0 - 1 = -\frac{2}{3}$$

par somme de limites.

$$\lim_{t\to 0^+} f'(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{3t^{2/3}} - \ln t - 1 = +\infty - (-\infty) - 1 = +\infty + \infty = +\infty$$

On en déduit que $Im(f') = \left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$, donc $0 \in Im(f')$ et enfin l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution sur $]0; 1[$ notée α.
Comme on ne connaît pas α mais $f'(\alpha)$, comparons les images par f' :

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{2/3}}{3} - \ln(1) + \ln(e) - 1 = \frac{e^{2/3}}{3} > 0 = f'(\alpha)$$

donc par stricte décroissance de f', $\alpha > \frac{1}{e}$.
D'autre part on a déjà vu que $\alpha \in]0; 1[$ donc $\alpha < 1$, et finalement on a bien :

$$\frac{1}{e} < \alpha < 1$$

3. Représenter l'ensemble D.

Correction :
On trace les droites $y = 1 - x$ et $x = \frac{1}{2}$ et on hachure la partie de courbe au-dessus de l'axe des abscisses et en dessous de la droite $y = 1 - x$ $(0 < y < 1 - x)$, et entre l'axe des ordonnées et la droite $x = \frac{1}{2}$ $(0 < x < \frac{1}{2})$.

4. G admet-t-elle un extremum local ?

Correction :
$\partial_1 G(x,y) = f'(x+y) - f'(2x)$ et $\partial_2 G(x,y) = f'(x+y)$.

- Le point (x,y) est un point critique de G si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1 G(x,y) = 0 \\ \partial_2 G(x,y) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} f'(x+y) - f'(2x) = 0 \\ f'(x+y) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} f'(2x) = 0 \\ f'(x+y) = 0 \end{array} \right.$$

en effectuant le pivot $L_1 \leftarrow L_2 - L_1$.

- Or $f'(t) = 0 \iff t = \alpha$ donc on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_1 G(x,y) = 0 \\ \partial_2 G(x,y) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} 2x = \alpha \\ x + y = \alpha \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\alpha}{2} \\ y = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \end{array} \right.$$

• On calcule les dérivées partielles secondes :
$\partial^2_{1,1}G(x,y) = f''(x+y) - 2f''(2x)$, $\partial^2_{1,2}G((x,y) = f''(x+y)$ et $\partial^2_{2,2}G((x,y) = f''(x+y)$.

$$\partial^2_{1,1}G(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}) = f''(\alpha) - 2f''(\alpha) = -f''(\alpha) \ , \ \partial^2_{1,2}G(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}) = f''(\alpha)$$

$$\partial^2_{2,2}G(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}) = f''(\alpha)$$

On calcule les valeurs propres de la matrice hessienne A en ce point, en faisant un pivot sur
$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -f''(\alpha) - \lambda & f''(\alpha) \\ f''(\alpha) & f''(\alpha) - \lambda \end{pmatrix}$ (on échange L_1 et L_2, puis on obtient une réduite triangulaire) on trouve deux valeurs propres de signes opposés :(car on sait que $f''(\alpha) < 0$ d'après la question 2.) .

$$sp(A) = \{-\sqrt{2}f''(\alpha); \sqrt{2}f''(\alpha)\}$$

Donc G n'admet aucun extremum local.

Exercice 5 : On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

2.(a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Correction :
On a $\partial_1(f)f(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y$ et
$\partial_2(f)f(x,y) = 4y^3 - 4y + 4x$.

2.(b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\begin{cases} x^3 - x + y & = 0 \\ y^3 + x - y & = 0 \end{cases}$

Correction :

Le gradient de f est $\nabla(f)(x,y) = (\partial_1(f)(x,y), \partial_2(f)(x,y)) = (4x^3 - 4x + 4y, 4y^3 - 4y + 4x)$

Donc $\nabla(f)(x,y) = (0,0)$ si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases}$$

2. (c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Correction :
(x, y) est donc un point critique de f si, et seulement si,

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \underset{(L_1 \leftarrow L_1 + L_2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ x^3 - x + y = 0 \end{cases}$$

Comme la fonction $x \to x^3$ est bijective , le système équivaut à :

$$\begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x(x^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

f possède donc trois points critiques qui sont :
$(0, 0)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

3.(a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Correction :
On a $\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 12x^2 - 4$, $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 12y^2 - 4$ et $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 4$

3.(b)Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

Correction :
Les matrices hessiennes de f sont donc :

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \; et$$
$$H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

3.(c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

Correction :
Les valeurs propres d'une matrice H sont les réels λ pour lesquels $H - \lambda I$ est non inversible.

• en $(0,0)$:

$$H(0,0) - \lambda I = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Ainsi, λ est valeur propre de $H(0;0)$ ssi
$(-4-\lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 8\lambda + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda(8+\lambda) = 0$.

Le réel 0 est donc valeur propre de $H(0;0)$ et
<u>la méthode du cours ne permet pas de conclure</u> quant à l'existence (ou non) d'un extrémum pour f au point $(0;0)$.

- en $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$:

$$H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) - \lambda I = H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) - \lambda I = \begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi, λ est valeur propre de $H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ ssi $(20-\lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (20-\lambda-4)(20-\lambda+4) = 0 \Leftrightarrow$
$(16-\lambda)(24-\lambda) = 0$.
Les 2 valeurs propres de $H\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = H\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ sont donc 16 et 24 , deux réels strictement positifs , ce qui permet de conclure que
<u>f admet donc en ces deux points un minimum local</u> qui a pour valeur $f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8$.

3.(d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x=0$. Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

Correction :
On a $f(x,x) = x^4 + x^4 - 2(x-x)^2 = 2x^4 \geq 0$ au voisinage de $x = 0$,
et
$f(x,-x) = x^4 + (-x)^4 - 2(x+x)^2 = -8x^2 + 2x^4 \underset{x \to 0}{\sim} -8x^2 \leq 0$
au voisinage de $x = 0$.
Comme $f(0,0) = 0$ et f change de signe au voisinage de $(0,0)$,on peut conclure que :
<u>f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.</u>

4.(a) Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer
$f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.

Correction :
Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, On a :

$$f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2$$
$$= \left(x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy\right) - x^4 + 4x^2 - 4 - y^4 + 4y^2 - 4 - 2x^2 - 2y^2 - 4xy$$
$$= -8.$$

4.(b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

Correction :

On a donc : $f(x,y) = -8 + (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 \geq -8$, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

Et comme $f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8$,

<u>f admet un minimum GLOBAL en ces deux points .</u>

5.(a) *Correction :*
La deuxième ligne du script complété :

$$z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

5.(b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ?
Justifier la réponse.

Correction :
La première nappe est la seule où la fonction admet deux points où il y a un minimum (global) de même valeur et c'est donc la seule possible pour f.